Acoustique

Notes de montage

14 mai 2021

L'acoustique est le domaine de la physique qui s'intéresse aux vibrations des solides et des fluides, la propagation des ondes sonores, etc. C'est un sujet assez vaste, on trouvera certainement moyen de quantifier des propriétés générales des ondes sonores.

1 Rappels théoriques

1.1 Approximation acoustique

Au repos, le fluide est caractérisé par une pression uniforme, une masse volumique uniforme, et une vitesse particulaire nulle. Au passage de l'onde sonore, apparaissent une surpression, une variation de masse volumique, et une vitesse particulaire que l'on traite comme des infiniment petits du premier ordre.

$$P = P_0 + p_1(M,t); \mu = \mu_0 + \mu_1(M,t); \vec{v} = 0 + \vec{v_1}$$

Equation de conservation locale de la masse :

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}(M,t) + \mathrm{div}(\mu\vec{v})(M,t) = 0$$

Equation d'Euler pour un fluide parfait où la pesanteur est négligée :

$$\mu(M,t)\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(M,t) + (\vec{v}\cdot \vec{grad})\vec{v}(M,t)\right) = -\vec{grad}(P)(M,t)$$

En considérant des développements limités à l'ordre 1 ces équations deviennent

$$\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}t}(M,t) + \mu_0\mathrm{div}(\vec{v_1})(M,t) = 0$$

$$\mu_0 + \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t}(M,t) = -gr\vec{a}dp_1(M,t)$$

On introduit la grandeur χ_0 définie par : $\chi_0 = \frac{1}{\mu_0}(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}_P})_{p_1=0}$.

Alors $\mu_1(M,t) = \mu_0\chi_0 p_1(M,t)$; et l'équation de conservation de la masse devient :

$$\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(M,t) = -\mathrm{div}(\vec{v_1})(M,t)$$

On prend un modèle unidimensionnel pour simplifier :

$$\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$$

Par dérivation et utilisation du lemme de Schwarz, on déduit que la surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{\mu_0\chi_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce qui définit la célérité des ondes sonores comme : $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_0\mu_0}}$

On obtient également par le même procédé pour la vitesse :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{\mu_0\chi_0}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x,t)$$

En considérant que l'évolution du gaz au passage des ondes sonores est adiabatique (vérifiant la loi de Laplace : $\frac{P}{\mu^\gamma} = \text{cste}$) on peut établir le modèle suivant pour la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

1.2 Impédance acoustique

Pour une onde plane progressive harmonique en employant les notations complexes :

$$\underline{p_i} = \underline{p_0}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \ ; \ \underline{p_0} = p_0\mathrm{e}^{i\varphi}$$

On obtiendra après des étapes de calcul non déroulées ici :

$$\underline{p_1} = \frac{\omega\mu_0}{k}\underline{v_1} = \mu_0 c \underline{v_1}$$

L'impédance acoustique est définie comme :

$$Z_a = \frac{p_1(M,t)}{v_1(M,t)} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_0}}$$

Valable pour une onde progressive.

1.3 Théorie des tuyaux sonores

La construction des tuyaux sonores impose certaines conditions aux limites particulières : à une extrémité ouverte, la pression est imposée comme étant égale à la pression atmosphérique et la surpression devient nulle. Pour une extrémité fermée, c'est la vitesse particulaire qui devient nulle. Les limites aux deux extrémités font que l'on cherche des ondes stationnaires c'est-à-dire de la forme :

$$p_1(x,t) = p_0\cos(\omega t)(A\cos(kx) + B\sin(kx))$$

avec $\omega = kc$. Pour la vitesse correspondante on emploie l'équation d'Euler :

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\mu_0 c}p_0\sin(\omega t)(A\sin(kx) - B\cos(kx))$$

Pour un tuyau symétrique (mêmes conditions aux limites à chaque bord) : $k = n\frac{\pi}{L}$ et pour un tuyau asymétrique : $k = (2n-1)\frac{pi}{2L}$. Seuls les harmoniques impaires ressortent pour un tuyau asymétrique.

1.4 Interfaces entre deux milieux

A l'interface entre deux milieux, l'onde sonore vérifie certaines propriétés :

— Continuité de la vitesse.

— Continuité de la pression.

$$p_i(x,t) = f(t - \frac{x}{c_1}) \ ; \ v_i(x,t) = \frac{1}{Z_1}f(t - \frac{x}{c_1})$$

$$p_r(x,t) = g(t + \frac{x}{c_1}) \ ; \ v_r(x,t) = -\frac{1}{Z_1}g(t + \frac{x}{c_1})$$

$$p_t(x,t) = h(t - \frac{x}{c_2}) \ ; \ v_t(x,t) = \frac{1}{Z_2} h(t - \frac{x}{c_2})$$

Les équations de raccordement s'écrivent en $x = 0$, pour la vitesse :

$$\frac{1}{Z_1}(f(t) - g(t)) = \frac{1}{Z_2} h(t)$$

Pour la surpression :

$$f(t) + g(t) = h(t)$$

Les coefficients de réflexion, transmission se définissent, pour la vitesse, comme :

$$r_v = \frac{v_r(0^-}{v_i(0^-)} \ ; \ t_v = \frac{v_t(0^+)}{v_i(0^-)}$$

Pour la surpression :

$$r_p = \frac{p_r(0^-}{p_i(0^-)} \ ; \ t_p = \frac{p_t(0^+)}{p_i(0^-)}$$

En combinant les équations de raccordement et les définitions pour ces coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} r_p & = & \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} & = -r_v \\ t_p & = & \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} & = \frac{Z_2}{Z_1} t_v \end{array} \right.$$

2 Mesure de la célérité des ondes sonores dans l'air

On utilise pour cela le trombone de König. L'onde captée par le microphone à la sortie du trombone est le résultat de la superposition de deux ondes : on obtient un maxima lorsque les deux ondes sont en phase, et un minima lorsqu'elle sont en opposition de phase. En augmentant le trajet d'une des deux ondes de λ, on passe d'un maxima à un autre. On relie une mesure de λ à la célérité des ondes sonores via la relation

$$\lambda = c \times T$$

déduisant T de la fréquence indiquée sur le GBF.

3 Mesure de la célérité des ondes sonores dans l'eau, puis dans un métal

On utilise pour cela une cuve équipée de deux transducteurs électromécaniques à quartz : les ondes parcourent une certaine distance dans l'eau. En appliquant simplement la relation $c = \frac{d}{t}$ on obtient la célérité des ondes sonores dans l'eau. En ajoutant une pièce métallique dans le récipient :

$$t = \frac{d_{eau}}{c_{eau}} + \frac{d_{metal}}{c_{metal}}$$

On en déduit facilement la célérité des ondes dans le métal en exploitant le résultat précédent.

4 Impédance acoustique du métal

Lorsqu'on plonge la plaque de métal dans l'eau, on constate que l'amplitude de l'onde restituée par le transducteur diminue : ceci est dû à l'absorption de l'onde par le métal. On relie cette baisse à la transmission des ondes dans le métal : les ondes sonores ont traversé deux interfaces. On supposera que l'onde sonore est peu atténuée dans le métal lui-même (hypothèse assez osée, en pratique raisonnable si la plaque est très fine). L'amplitude de la surpression a été multipliée par

$$\frac{4Z_{eau}Z_{metal}}{(Z_{eau} + Z_{metal})^2}$$

On prendra $Z_{eau} = \rho_0 c_{eau}$; ce calcul nécessite de passer par une équation du second degré.

5 Modes propres d'un tuyau sonore

Il s'agit d'employer un tuyau d'orgue à perce cylindrique, de faire vibrer l'air à l'intérieur et de capter le son obtenu puis d'en réaliser la transformée de Fourier. On peut alors montrer la présence des modes pairs et impairs (en période de crise sanitaire, il n'est pas nécessaire de souffler dans le tuyau avec la bouche ni d'employer des dispositifs de soufflerie trop complexes : on se contentera de frapper l'ouverture du tuyau avec le plat de la main, le son décroît vite mais la TF marche quand-même relativement bien). Ceci permet d'introduire le phénomène d'ondes stationnaires, de résonances, et de donner les noms musicaux des modes propres (octaves, quintes, etc...)

6 Introduction aux battements via l'acoustique musicale

En rebondissant sur l'expérience précédente, et pour changer de la sempiternelle expérience avec les diapasons.

Les recherches sur les liens entre les propriétés des oscillateurs physiques (cordes, tuyaux...) et les qualités harmoniques du son qu'ils produisent peuvent remonter jusqu'à Pythagore et les expériences qu'il a conduites avec un monocorde. Il a constaté que la superposition des sons de deux monocordes donnait un résultat « harmonieux » si les cordes étaient de longueurs telles que celle de l'une était un multiple d'une fraction de deux entiers « simples » de l'autre. En particulier, le rapport de longueur $\frac{3}{2}$ donnait un résultat très bon (la note dont la fréquence est égale à $\frac{3}{2}$ fois la fréquence d'une note de base est appelée « quinte juste » de cette note). Ceci a donné lieu à l'instauration de méthodes pour accorder les instruments et au système à 12 notes de la musique occidentale : en effet, après avoir réalisé 12 quintes on retombe sur une note très similaire à une note déjà trouvée précédemment. On se limite donc en Europe à 12 notes. Cependant le très léger écart qui subsiste est à l'origine de bien des problèmes : on garde en effet une quinte fausse dans le système. C'est la « quinte du loup » qui sonne notoirement moins bien que les autres ; ce défaut a conditionné toute la musique médiévale. Il était impossible par exemple, de changer de tonalité dans un morceau, les instruments devaient être accordés précisément pour une même gamme, etc. Afin de permettre à la musique moderne d'explorer des horizons plus vastes, le « tempérament égal » a vu le jour (théorisé au XVII$^{\text{ème}}$ siècle et mis en pratique au XX$^{\text{ème}}$). Il consiste à diviser l'octave en 12 intervalles égaux ; ceci permet de diluer les défauts du systèeme pythagoricien tout en conservant assez bien toutes ses qualités.

On mesurera les battements résultant de la superposition d'une quinte juste et d'une quinte du loup, et d'une quinte en tempérament égal et d'une quinte juste. Ceci permettrait de donner une mesure quantitative du *comma pythagoricien.*

7 Effet Doppler et battements : application à la mesure de la vitesse d'un mobile

L'effet Doppler est une baisse ou augmentation de la fréquence sonore perçue par un récepteur s'il est en mouvement relatif par rapport à la source. Pour l'effet Doppler longitudinal (le plus simple, pas d'angle à prendre en compte) :

$$\lambda = c \times T - v \times T$$

avec $v > 0$ si récepteur et source se rapprochent.

On prend trois mobiles sur table traçante. Il faut deux émetteurs et un récepteur. Un émetteur est fixe, l'autre en mouvement. L'effet Doppler est la cause de battements en raison du léger décalage de fréquence produit. On vérifiera la vitesse de l'émetteur en mouvement calculée à partir des formules de l'effet Doppler.

Conclusion

L'acoustique est un vaste sujet : on a pu s'intéresser à certaines propriétés des ondes sonores dans divers matériaux et montré certains effets remarquables (Doppler et battements) et proposé une introduction à l'acoustique musicale (ce qui touche d'une certaine façon à l'acoustique physiologique). On aurait pu aussi mettre en évidence d'autres caractéristiques communes aux ondes (diffraction).