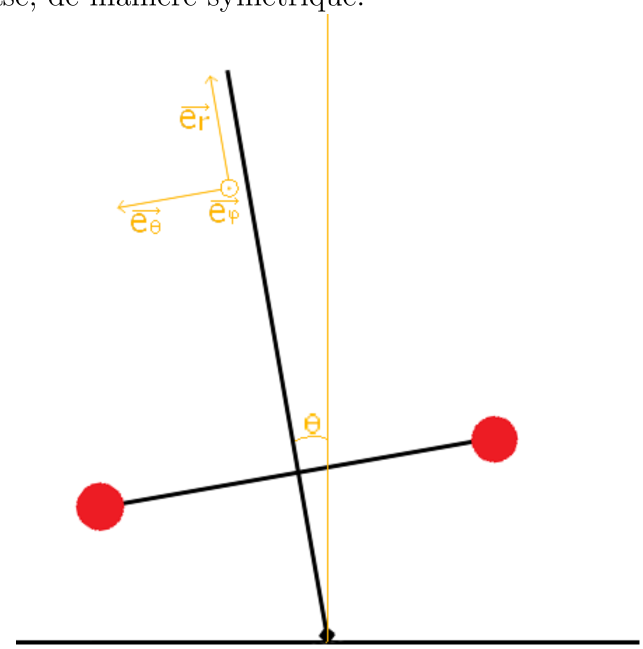
Précession

22 mai 2022

1 Théorie de la précession par l'exemple

On va considérer un exemple très simple pour mettre en équation un phénomène de précession. On va modéliser une toupie, par une tige rectiligne, de masse négligeable, autour de laquelle sont fixées deux masselottes, de masse M, à une distance r de la tige, et à une hauteur h par rapport à la base, de manière symétrique.



Le moment des forces par

rapport au point O (point de contact avec le support est la somme des moments des poids des deux masses, d'où, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = (h\vec{e_r} + r\vec{e_\theta}) \wedge M\vec{g} + (h\vec{e_r} - r\vec{e_\theta}) \wedge M\vec{g}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = 2h\vec{e_r} \wedge M\vec{g} = 2hMg\sin(\theta)\vec{e_\varphi}$$

On peut également écrire le moment cinétique sous la forme du produit du vecteur rotation instantané de la toupie et de son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation : $\vec{\mathcal{L}_O} = J\vec{\omega}$. Il se trouve qu'on peut écrire $2hMg\sin(\theta)\vec{e_\varphi}$ comme $-\frac{2hM\vec{g}}{J\omega} \wedge \vec{\mathcal{L}_O}$ puisque $\vec{\mathcal{L}_O}$ est colinéaire à $\vec{e_r}$.

D'où finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2hM\vec{g}}{J\omega} \wedge \vec{\mathcal{L}_O}$$

Ceci indique que le moment cinétique de la toupie va subir un mouvement de *précession* : la norme du moment cinétique reste constante mais son axe de rotation est amené à lentement tourner autour de la verticale. On peut calculer la vitesse de précession : la « pointe » du vecteur moment cinétique décrit un cercle à la vitesse constante $2hMg\sin(\theta)$, d'où en notant $\mathcal{L}_O$ la norme du moment cinétique et ω_p la pulsation de précession autour de la verticale :

$$\mathcal{L}_O \sin(\theta)\omega_p = 2hMg\sin(\theta)\frac{\mathcal{L}_O}{J\omega}$$

D'où :

$$\omega_p = \frac{2hMg}{J\omega}$$

Remarque : approximation gyroscopique. Du fait-même de la précession, en réalité, $\vec{\omega}$ n'est pas colinéaire à $\vec{e_r}$. Cependant, si la vitesse de précession est très inférieure à la vitesse de rotation de la toupie autour de son axe, alors on peut appliquer *l'approximation gyroscopique* et considérer que le vecteur rotation est quasiment colinéaire à l'axe de rotation sur elle-même de la toupie.

Plus généralement, toute quantité vectorielle $\vec{N}$ peut être amenée à subir une précession si elle vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \wedge \vec{N}$$

et on aura $||\vec{\Omega}||$ pour valeur de la pulsation de précession.

2 Exemples macroscopiques

Précession des équinoxes : à développer

3 Exemples microscopiques

Précession de Larmor : à développer