Oscillateurs : portraits de phase et non-linéarités

22 avril 2021

Contexte de la leçon

C'est une leçon qui se met minimum niveau L2 ; elle requiert une certaine aisance avec les concepts fondamentaux de la mécanique et présente des ouvertures sur des idées que l'on retrouvera en mécanique analytique ou en physique statistique.

Prérequis

— Mécanique Newtonienne
— Energie potentielle, énergie cinétique, énergie mécanique
— Equations différentielles

1 Introduction : généralités sur les oscillateurs

En physique, on appelle « oscillateur »un système évoluant de part-et-d'autre autour d'une position d'équilibre stable (il est donc caractérisé par une grandeur qui évolue dans le temps de manière oscillante). Ces systèmes physiques peuvent être mécaniques, électriques, etc. réels ou fictifs. L'objectif de cette leçon est de présenter certaines manières de traiter de tels systèmes. On va présenter plusieurs types d'oscillateurs et ainsi que les outils utilisables pour prévoir leur comportement.

1.1 L'oscillateur le plus simple : l'oscillateur harmonique

Prenons l'exemple simple d'un système physique constitué d'un ressort vertical, auquel est suspendu une masse. La masse subit l'action de son poids, ainsi que de la force de rappel du ressort ; on ne tient pas encore compte de forces dissipatives. En considérant le mouvement comme vertical, le mouvement des forces donne :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - z_0)$$

En faisant les changements de variable $z_e = z_0 + \frac{mg}{k}$ et $Z = z - z_e$, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

Cette équation correspond à celle définissant un *oscillateur harmonique.*

Une solution élémentaire de cette équation différentielle est :

$$Z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

D'où le nom « harmonique » ; l'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions élémentaires de cette forme sera également solution.

Propriétés d'une équation linéaire : Une somme de solutions est aussi une solution (principe de superposition) (mais comment ça se traduit avec des ressorts ?) Dépendance fréquence / amplitude etc. Autres exemples de systèmes linéaires : oscillateur amorti, etc. Intérêt, exploitation du principe de superposition.

Portrait de phase de l'oscillateur harmonique. Le portrait de phase est un outil d'analyse qui peut s'avérer très utile pour étudier des systèmes physiques tels que des oscillateurs. Il s'agit d'un graphique dans lequel on porte en abscisse une grandeur caractérisant le système, et en ordonnée, une grandeur proportionnelle à la dérivée temporelle de cette grandeur (exemple : position en abscisse, impulsion en ordonnée). En mécanique newtonienne, on peut caractériser l'état d'un système si on connaît les positions et impulsions de ses constituants. Un point de ce graphique représente donc un état de l'oscillateur. Pour effectuer le portrait de phase, on reporte sur ce graphique la courbe de l'ensemble des points qui correspondent à des états pris par le système.

L'oscillateur harmonique a été modélisé sans terme dissipatif. Il n'est soumis qu'à des forces conservatives. *Son énergie mécanique est conservée* et vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{k}{2}z^2 - kzz_0 + \frac{k}{2}z_0^2 + mgz = C^{te}$$

Or, à l'équilibre, lorsque la masse est immobile, le principe fondamental de la dynamique projeté sur la verticale montre que $mg = kz_0$.

$$\Leftrightarrow mgz - kz_0 z = 0$$

L'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{k}{2}z^2 = C^{te}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_z^2}{2m} + \frac{z^2}{2/k} = C^{te}$$

On montre alors que le portrait de phase (trajectoire dans le graphe $(z,\, p_z)$ est une ellipse.

On pourra le tracer au moyen d'un script Python. Cette ellipse est en permanence parcourue par l'oscillateur en activité. Cela nous indique que le mouvement est périodique. Ce cycle périodique est un cycle d'équilibre stable : il est qualifié de *cycle attracteur*.

Ce modèle a plusieurs particularités : Invariance par renversement du temps (évolution réversible (exemple : projeter un film à l'endroit ou à l'envers. Pour un film d'un morceau de sucre qui fond, on sait tout-de-suite s'il est à l'endroit ou à l'envers. Pour un oscillateur purement harmonique, c'est-à-dire sans amortissement, on ne peut pas décider !) ;

Invariance par dilatation : Des conditions initiales peuvent donner n'importe-quelle amplitude au mouvement sans que cela ne change quoi que ce soit à l'allure du portrait de phase hormis la taille de l'ellipse.

Ce modèle simplifié a plusieurs limites : L'invariance par renversement du temps n'en fait pas un modèle très réaliste. En effet, dans la nature on aura quasi-systématiquement affaire à des effets dissipatifs qui vont altérer la marche du système dans la durée. De plus l'invariance par dilatation ne permet pas de tenir compte de certaines limites des systèmes lorsque soumis à des excitations très importantes (déformations irréversibles, etc...)

1.2 L'oscillateur amorti

Le modèle de l'oscillateur harmonique n'est cependant qu'un modèle idéal. En vérité, on aura toujours des frottements ou d'autres phénomènes qui conduiront à des pertes d'énergie ; il devient nécessaire de mettre sur pied un autre modèle qui permette d'en tenir compte.

On peut affiner le modèle de l'oscillateur à ressort présenté précédemment en modélisant les frottements visqueux de l'air ; on introduira le terme $2\xi\dot{z}$ à cet effet. L'équation différentielle devient :

$$\ddot{z} + 2\xi\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

Si l'amortissement est faible, cette équation différentielle linéaire d'ordre deux admet des solutions réelles de la forme :

$$z(t) = A\mathrm{e}^{-\xi t}\cos(\sqrt{\xi^2 - \omega^2}t + \varphi)$$

On note que les oscillations de pulsation $\sqrt{\xi^2 - \omega^2}$ sont modulées par l'exponentielle $\mathrm{e}^{-\xi t}$ ce qui donne un mouvement *pseudo-périodique* pour $\xi \neq 0$. En l'occurence si $\xi > 0$ les oscillations s'amplifient avec le temps et si $\xi < 0$ les oscillations décroissent. Dans la majorité des cas réels, pour une solution exprimée de la manière indiquée ci-dessus, $\xi < 0$ pour rendre compte de la dissipation de l'énergie de l'oscillateur.

On brise l'invariance par renversement du temps : c'est la conséquence de la modélisation de phénomènes irréversibles entraînant la dissipation d'énergie.

Note : dans le cas de l'amortissement fort (ξ trop élevé), les oscillations n'ont plus lieu.

Portrait de phase : l'attracteur devient un point (suivant le signe du terme d'amortissement). Cela permet de montrer que le mouvement est apériodique, et que l'oscillateur revient systématiquement vers le même état d'équilibre (l'immobilité).

1.3 Oscillations forcées

Supposons qu'on attache l'extrémité supérieure du ressort, d'altitude z_s, à un moteur qui produit des oscillations sinusoïdales. On produit ainsi des oscillations forcées. L'équation différentielle de l'oscillateur amorti s'écrit dans ces conditions :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - z_s - l_0) - 2\xi\dot{z}$$

Les oscillations de l'extrémité supérieure sont telles que $z_s = d\cos(\omega t + \varphi_e)$ et on obtient donc, après des changements de variable analogues à ceux réalisés pour l'oscillateur non amorti :

$$m\ddot{Z} + 2\xi\dot{Z} + kZ = kd\cos(\omega t + \varphi_e)$$

Que l'on peut réécrire :

$$\ddot{Z} + 2\xi\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{kd}{m}\cos(\omega t + \varphi_e)$$ [1]

La solution de cette équation avec second membre est la somme de la solution de l'équation homogène, laquelle est identique à l'équation obtenue dans le cas d'oscillations libres amorties :

$$Z(t)_h = A\mathrm{e}^{-\xi t}\cos(\sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}t + \varphi_a)$$

ainsi que d'une solution particulière de l'équation :

$$Z(t)_p = B\cos(\omega t + \varphi_z)$$

La solution totale est dont :

$$Z(t) = A\mathrm{e}^{-\xi t}\cos(\sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}t + \varphi_a) + B\cos(\omega t + \varphi_z)$$

Ce qui se traduit par l'existence d'un régime transitoire (terme modulé dans le temps par l'exponentielle) auquel succède un régime permanent d'oscillations périodiques.

Des phénomènes de résonances peuvent être étudiés en régime permanent au moyen de la notation complexe. L'amplitude des oscillations est maximale lorsque la pulsation de forçage est égale à la pulsation propre du ressort.

1. Peut-être aurais-je dû définir la pulsation propre ! Elle pourra être introduite simplement si on prend le temps de détailler l'application du principe fondamental de la dynamique pour l'oscillateur amorti.

2 Exemples de systèmes non-linéaires : propriétés et conséquences

2.1 Le pendule simple

Etudions maintenant les oscillations d'un pendule simple de longueur l dans le champ de pesanteur g. La seconde loi de Newton nous donne l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Cette équation n'est pas une équation linéaire, en raison du terme en $\sin\theta$! La réponse n'a plus la même allure avec l'amplitude. Notamment la période des oscillations varie avec leur amplitude.

Cependant, on peut effectué un développement limité :

$$\sin\theta = \sum \sin(0) + \theta\cos(0) - \frac{\theta^2}{2}\sin(0) - \frac{\theta^3}{6}\cos(0)...$$

et on voit ainsi que, si θ est suffisamment proche de 0, que l'on peut se limiter à l'ordre 1 et retrouver l'équation linéaire de l'oscillateur harmonique. On pourra montrer que la période s'écrit $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Dans le cas où cette modélisation très simplifiée ne serait pas satisfaisante, on peut inclure des ordres supérieurs ; à l'ordre 3 on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{l}\frac{\theta^3}{6} = 0$$

Dans ce cas-là on peut utiliser la *formule de Borda* pour la période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

On pourra tracer le portrait de phase pour plusieurs amplitudes, et montrer que pour des amplitudes basses, l'allure se rapproche de celle d'un portrait de phase d'oscillateur harmonique.

2.2 Oscillateur de Van Der Pol

C'est un modèle d'oscillateur plus général et réaliste ; il permet par exemple de modéliser des oscillations entretenues, et de rendre compte de certaines variations par dilatation. Cet oscillateur peut se réaliser au moyen de circuits électroniques qui ne seront pas détaillés ici. Il répond à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} - \xi_0 \left(1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation, non linéaire, n'a *pas de solution analytique* ; l'intérêt de tracer un portrait de phase pour étudier l'évolution de cet oscillateur et connaître son équilibre en devient manifeste.

C'est un oscillateur auto-entretenu (et on peut le vérifier, voir bup réf 7549)

On peut constater que quelles que soient les conditions initiales, en régime libre, les oscillations finissent toujours par acquérir la même allure et la même amplitude. On peut observer un cycle attracteur sur le portrait de phase (ce cycle n'est pas une ellipse).

En régime forcé, on constate que les oscillations présentent des variations chaotiques.

3 Conclusion

- Définition d'un oscillateur.
- Intérêt du portrait de phase : étudier l'évolution, notamment les états d'équilibre d'un système.
- Quelques propriétés de systèmes non linéaires :
  - En général, les équations différentielles sont plus compliquées (voire impossibles) à résoudre.
  - La non-linéarité peut entraîner une indépendance aux conditions initiales sur l'évolution « au long cours »
  - Elle peut aussi conduire à des comportements chaotiques.

Bibliographie

http ://ressources.agreg.phys.ens.fr/static/TP/serie3/ PhysiqueNonLineaire.pdf

http ://perso.univ-lemans.fr/ orich/docs/presentation_COURS_master2 _vib_NL.pdf

http ://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue /equadiff/equadif/portrait.php ?typanim=Flash

Bulletins de l'Union des Physiciens : références 3036, 7549, 14487, 7976, 22014 ; consultables sur http ://bupdoc.udppc.asso.fr

https ://uel.unisciel.fr/physique/syst_oscillants/syst_oscillants_ch04/co/ sexercer_ch4_05.html