Ecoulement parfait d'un fluide

21 mai 2022

Introduction

Ce document vise à présenter quelques notions portant sur un modèle particulier d'écoulements, présentant des simplifications, mais permettant néanmoins une compréhension aisée de certains phénomènes en mécanique des fluides. Il s'agit du modèle de l'écoulement parfait.

Prérequis. Thermodynamique (premier principe en système ouvert), notion de particule de fluide, statique des fluides, analyse vectorielle, viscosité, équation de Navier-Stokes, nombre de Reynolds, ligne de courant.

1 Validité du modèle

On repart de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(M,t))\right)=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}(M,t)$$

Cette équation est valable dans le cas d'un écoulement incompressible (la masse volumique ρ est constante), dans un référentiel galiléen, d'un fluide newtonien.

Cette équation fait figure de base de la dynamique des fluides. C'est cependant une équation relativement difficile à utiliser telle quelle : il n'en existe pas aujourd'hui de solution rigoureuse connue. La leçon d'aujourd'hui va consister, pour l'essentiel, à introduire une simplification : on va négliger le terme de viscosité présent dans cette équation.

Voyons à quelles conditions cette négligence est possible.

On ne connaît pas de fluide rigoureusement non-visqueux, hormis les superfluides qui restent assez exotiques au vu de leurs conditions d'obtention.

On peut regarder le *nombre de Reynolds* pour déterminer si le régime non visqueux est une bonne approximation. On en rappelle son expression usuelle :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})}{\eta \Delta \vec{v}} \approx \frac{UL}{\nu}$$

avec U la vitesse caractéristique du fluide et L la longueur caractéristique de l'écoulement, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la *viscosité cinématique* du fluide, caractérisant la diffusion de la quantité de mouvement dans le fluide. Le modèle de l'écoulement parfait correspond alors aux écoulements pour lesquels $\nu \to 0$, autrement dit les écoulements pour lesquels $\mathrm{Re} \to \infty$.

Problème : si le nombre de Reynolds est très élevé, on peut observer des turbulences au niveau des obstacles. Ceci rendrait invalide l'hypothèse consistant à négliger la viscosité.

On doit donc considérer qu'on se trouve hors de la *couche limite* qui pourrait exister autour d'un obstacle. Des études expérimentales permettent d'en relier un ordre de grandeur de l'épaisseur au nombre de Reynolds et à la taille caractéristique de l'écoulement :

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

A nombre de Reynolds élevé, l'épaisseur de la couche limite baisse donc. On peut en donner quelques ordres de grandeur :

— Nageur dans une piscine : $U \approx 2m/s$, $L \approx 2m$, $\nu \approx 10^{-3} Pa.S$ et $\rho = 1,00 \times 10^3 kg/m^3$; on déduit $\mathrm{Re} = 4 \times 10^6$ d'où $\delta \approx 1mm$.

— voiture roulant à 90 km/h : $U = 25m/s$; $L \approx 2m$, $\eta \approx 2 \times 10^{-5} Pa.S$; $\rho \approx 1kg/m^3$ d'où $\mathrm{Re} \approx 2.5 \times 10^6$ et $\delta \approx \frac{2}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \approx 1 \times 10^{-3}$.

Dans ces exemples on a une couche limite d'épaisseur assez fine voire négligeable comparé à la taille de l'obstacle : c'est dans cette zone que se concentrent les turbulences qui ont pour effet de freiner ou le nageur ou la voiture. Le modèle du fluide parfait n'est pas valable sous ces couches limites, le nombre de Reynolds étant très élevé.

2 La loi de Bernoulli

En partant de l'équation de Navier-Stokes rappelée en amont, on va déterminer une équation simple, le théorème de Bernoulli, qui nous permettra d'interpréter aisément beaucoup de phénomènes en mécanique des fluides.

2.1 Hypothèses de travail

Le cadre de la démonstration suivante est tout d'abord celui de l'équation de Navier-Stokes, dont le domaine de validité comprend des écoulements *incompressibles* de fluides *newtoniens.*

Pour établir la loi de Bernoulli, on considère de plus que l'écoulement est *stationnaire* et *irrotationnel.*

2.2 Enoncé

Le théorème de Bernoulli indique qu'au cours d'un tel écoulement, $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P$ est une constante.

2.3 Démonstration

On part de l'équation de Navier-Stokes tronquée du terme de viscosité :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(M,t))\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

Remarque. Cette équation ressemble dans sa forme à *l'équation d'Euler,* laquelle se déduit simplement de lois de conservation de la masse et du principe fondamental de la dynamique. L'équation d'Euler a cependant un domaine de validité différent (elle est valide aussi pour des fluides compressibles) donc on ne peut pas vraiment identifier l'équation d'Euler à celle de Navier-Stokes simplifiée *stricto sensu.* On pourrait cependant débuter cette leçon en prenant pour base l'équation d'Euler et non l'équation de Navier-Stokes.

L'écoulement étant stationnaire, l'expression devient :

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(M,t)) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

Il se trouve que :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\wedge \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

On a de plus si $\vec{g} = -g\vec{u_z}$, $\rho\vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$ et ainsi :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\vec{\nabla}(p) - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

d'où finalement :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{constante}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Cas d'un écoulement rotationnel. Si le rotationnel est non nul, alors la relation n'est valable que si l'on se place le long d'une ligne de courant. On peut reprendre la démonstration en prenant le même point de départ, et ensuite :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} - \left(\vec{v}\wedge \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v})\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

car $\mathrm{d}\vec{l}$ est colinéaire avec la vitesse. Ensuite :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\vec{\nabla}(p)\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \rho\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

L'action de $\mathrm{d}\vec{l}$ mène à :

$$\int_A^B \mathrm{d}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\int_A^B \mathrm{d}P - \int_A^B \rho g \mathrm{d}z$$

$$\frac{\rho v(B)^2}{2} - \frac{\rho v(A)^2}{2} + P(B) - P(A) + \rho g z(B) - \rho g z(A) = 0$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + P = \text{constante}$$

Ainsi on retrouve la même relation le long d'une ligne de courant.

2.4 Interprétation de la loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli s'apparente à une loi de conservation (on a une grandeur constante au cours de l'écoulement). La quantité conservée peut se décomposer en trois termes :

— $\frac{\rho v^2}{2}$ peut être apparenté à une énergie cinétique (ce terme est cependant homogène à une énergie par unité de volume), de par sa dépendance particulière à la vitesse.

— On reconnaît également dans $\rho g z$ une énergie potentielle gravitationnelle par unité de volume (analogie avec l'expression ($E_p = mgz$).

— La pression peut s'interpréter comme une densité volumique de travail des forces de pression.

Le théorème de Bernoulli est donc assez semblable au théorème de conservation de l'énergie mécanique, en mécanique newtonienne.

3 Applications de la loi de Bernoulli

Nous allons pouvoir ré-employer la loi de Bernoulli dans plusieurs situations pour expliquer certains effets physiques.

3.1 Tube de Pitot

Un tube de Pitot est un appareil de mesure qui permet de déduire la vitesse d'un fluide en exploitant la loi de Bernoulli. Il composé de deux canaux, menant chacun à l'une des branches d'un manomètre à liquide (tube en U). l'un d'eux a une entrée placée dans la même direction que le fluide : celui-ci peut entrer dans le canal, mais on atteint assez rapidement l'équilibre mécanique avec le fluide déjà coincé dans ce canal (entre l'entrée et la surface du liquide dans le manomètre), ce qui fait que le fluide a une vitesse nulle à l'entrée du canal. L'autre canal a une entrée tangente à l'écoulement du fluide.

Du fait de la différence de vitesse du fluide entre les deux entrées, on a également une différence de pression (les deux entrées étant sensiblement à la même altitude). Cette différence de pression entraîne le déplacement du liquide dans le manomètre par rapport à sa position d'équilibre. La mesure de ce déplacement permet donc de déduire la vitesse du fluide.

3.2 Effet Venturi

Cet effet est utilisé par exemple dans les trompes à vide en laboratoire de chimie.

Imaginons un tube cylindrique montrant un étranglement. Dans ce tube circule un fluide en écoulement parfait et incompressible. De l'incompressibilité de l'écoulement découle la conservation du débit volumique, de laquelle on déduit que la vitesse augmente dans l'étranglement. Si la conduite est posée horizontalement, z est constant et l'augmentation de v doit donc s'accompagner d'une baisse de la pression au niveau de l'étranglement par rapport aux autres parties du tube.

3.3 Autres pistes

On peut également évoquer la formule de Torricelli, ou bien des effets plus compliqués comme l'effet Coanda, ou l'effet Magnus, dans le cadre de cette leçon.

Conclusion

Le modèle de l'écoulement parfait d'un fluide consiste à négliger les phénomènes diffusifs lors de l'écoulement (diffusion de quantité de mouvement, diffusion thermique...) Cette approximation permet d'en déduire la formule de Bernoulli, interprétable comme une équation de conservation de l'énergie, et grâce à laquelle on peut comprendre un certain nombre de phénomènes. Il sera possible dans de futures études de comprendre davantage et de modéliser l'influence de la viscosité sur les écoulements.