Dynamique relativiste

22 mai 2022

Prérequis

Transformations de Lorentz, notion de quadrivecteur, cinématique relativiste.

Introduction

L'étude de la cinématique relativiste a conduit à l'établissement des transformations de Lorentz. Celles-ci ont pour vocation à remplacer les transformations de Galilée, qui sont utilisées en mécanique classique. Elles introduisent des changements fondamentaux très importants voire contre-intuitifs, et on peut se demander ce qui sera amené à remplacer le formalisme newtonien des forces, ainsi que les principes fondamentaux de la dynamique, dans ce nouveau cadre relativiste.

1 Le quadrivecteur énergie-impulsion

Le principe fondamental de la dynamique newtonienne est représenté par la formule suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \Sigma\vec{F}$$

Pouvons-nous trouver un principe analogue, pour une particule en mouvement dans un référentiel galiléen ?

En cinématique relativiste, on a pu être conduits à définir le quadrivecteur position :

$$(4-x) = (ct, x, y, z)$$

avec t le temps et x, y, z les coordonnées de la particule, dans le référentiel utilisé.

Le mouvement d'une particule dans ce référentiel est décrit comme une succession d'événements séparés par un intervalle de temps dt et ayant lieu aux positions (x, y, z) successives de la particule. L'intervalle d'espace-temps séparant chacun de ses événements peut s'écrire dans la limite infinitésumale comme $\mathrm{d}s = (c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2)^{1/2}$, qui est un invariant relativiste (séparant deux mêmes événements, il a la même valeur quel que soit le référentiel dans lequel sont exprimées les coordonnées de ces événements).

On définit la *durée propre* séparant les deux événements infiniment voisins comme :

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$$

où $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ avec v la vitesse de la particule dans le référentiel considéré (à ne pas confondre avec le facteur relativiste d'entraînement d'un référentiel par rapport à un autre).

Etant le quotient de deux invariants relativistes, on comprend aisément que la durée propre doit être un invariant relativiste.

On définit alors le *quadrivecteur vitesse* de la particule comme :

$$(4 - v) = \frac{\mathrm{d}(4 - x)}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct, \vec{r}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

On peut alors également définir le quadrivecteur pour une particule de masse m, qu'on appelle *quadrivecteur énergie-impulsion* :

$$(4 - p) = m(4 - v) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

Pourquoi ce nom ? On peut regarder ce qu'il se passe à la limite classique, c'est-à-dire lorsque v est très petit devant c :

— $\gamma \to 0$. Donc la partie spatiale du quadrivecteur tend vers $m\vec{v}$ ce qui correspond à la quantité de mouvement en mécanique classique (d'où le nom impulsion).

— Pour la partie temporelle : $\gamma mc = mc(1 - \beta^2)^{1/2} \approx mc(1 + \frac{\beta^2}{2}) = \frac{1}{c}(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2)$. On reconnaît la somme de l'énergie de masse de la particule au repos, déjà abordée au lycée pour discuter les réactions nucléaires, et de l'énergie cinétique, multipliée par un facteur $1/c$. D'où le terme énergie.

On interprètera alors le terme γmc^2 comme représentant *l'énergie totale de la particule libre* (plus de détails plus loin). On réécrira le quadrivecteur énergie-impulsion sous la forme suivante :

$$(4-p) = (\frac{E}{c}, \vec{p})$$

en prenant $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ et E l'énergie totale de la particule.

On vérifie que la norme du quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant relativiste :

$$||(4-p)||^2 = m^2(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2) = m^2 c^2$$

C'est bien un invariant relativiste (m et c indépendants du référentiel).

Remarque. Au sujet de la masse, certaines publications incorporent le facteur γ à la masse de la particule, afin de garder une définition pour la quantité de mouvement ayant la même allure que son équivalent classique $\vec{p} = m\vec{v}$, avec pour conséquence que la masse devient variable. C'est une démarche qui a suscité des débats et n'est aujourd'hui plus guère employée.

On peut également déduire de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion, ce résultat qui sera très utile en physique des particules par exemple :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Que l'on peut réécrire :

$$E = \gamma mc^2$$

On identifie l'énergie à la somme de l'énergie de masse mc^2 et de l'énergie cinétique, ce qui donne pour l'énergie cinétique :

$$E_{cin} = (\gamma - 1)mc^2$$

1.1 Une nouvelle formulation du principe fondamental de la dynamique

On peut introduire un quadrivecteur force $(4-f)$ tel que $f = \gamma\vec{F}$ où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées à la particule. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}(4-p)}{\mathrm{d}\tau} = (4-f)$$

On peut également utiliser le temps du référentiel sachant $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma$, et ne s'intéresser qu'à la partie spatiale. On trouve :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

sachant $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. On tend à retrouver le principe fondamental de la dynamique pour des valeurs de vitesses faibles.

L'accélération et la résultante des forces ne sont plus colinéaires, car :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \gamma m \vec{a} + m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

2 Applications

2.1 Energie de masse

L'équivalence masse-énergie est mise au jour en relativité. Les exemples les plus frappants de cette équivalence sont les noyaux des atomes lourds, pour lesquels on constate que la masse du noyau est inférieure à la somme des masses des constituants individuels du noyau pris isolément. En effet une partie de cette énergie de masse est convertie en énergie de liaison, ce qui permet aux protons et neutrons de rester liés par interaction forte et donne sa cohésion au noyau. La différence entre les deux masses est appelée couramment « défaut de masse » Fournir au noyeau l'énergie suffisante pour combler le manque dû à l'énergie de liaison permet de casser le noyau (fission nucléaire).

2.2 Le photon

Reprenons les expressions de l'énergie et de l'impulsion déterminées précédemment :

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pour une particule telle qu'un photon, on a $v = c$. Ceci semble a priori entraîner $E = \infty$ et $p = \infty$ ce qui n'est pas souhaitable pour un physicien raisonnable. On résout de suite ce paradoxe en conférant au photon une masse nulle.

Sachant cela, on reprend l'autre expression pour l'énergie donnée plus haut pour déterminer que, pour un photon :

$$E = pc$$

Des études en physique quantique sur l'effet photoélectrique par exemple, conduisent à la formule $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. On en déduit une expression de la quantité de mouvement de l'électron :

$$p = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Qui n'est pas sans rappeler la formule utilisée pour la longueur d'onde de De Broglie.

2.3 Référentiel et physique des particules

Etant donné les vitesses extrêmes atteintes par les particules dans les accélérateurs aujourd'hui, leur comportement donne un exemple flagrant dans lequel il n'est plus possible d'utiliser le cadre de la mécanique classique.

Le caractère relativiste des particules conditionne l'architecture des collisionneurs de particules qui doivent tenir compte de ces effets relativistes : on peut mettre dos-à-dos deux architectures, celle de la cible fixe et celle de l'anneau de collision.

— Cible fixe : dans le référentiel du laboratoire, une particule est fixe et subit une collision avec une particule incidente qui a été accélérée au préalable.

— Anneau de collision : dans le référentiel du laboratoire, les deux particules sont accélérées et s'entrechoquent frontalement.

On se référera aux calculs explicités dans le document *Collisionneurs de particules* disponible sur le site (section 2.1). On peut notamment démontrer que, dépassant l'intuition newtonienne qui nous ferait croire que les énergies nécessaires pour donner lieu à une réaction entre les particules utilisées soit la même dans les deux situations, de par la relativité des vitesses en mécanique classique, le cadre relativiste montre qu'il est énergétiquement (beaucoup) plus avantageux de se placer dans la situation de l'anneau de collision (ceci pourrait être à nuancer, au vu d'autres avantages que la cible fixe pourrait avoir, par exemple la densité de particules dans la cible qui rend plus facile la rencontre des particules d'un point de vue géométrique).

Conclusion

Afin d'adapter les principes newtoniens au nouveau cadre relativiste, on a pu introduire de nouveaux quadrivecteurs, notamment le quadrivecteur énergie-impulsion, qui permet de reformuler un principe fondamental de la dynamique. Son analogue classique déjà connu apparaît alors comme une approximation valable aux vitesses petites devant c. Des considérations énergétiques amènent également à la découverte de *l'équivalence masse-énergie* ainsi que d'autres particularités non prévues par la mécanique classique mais qui s'avèrent flagrantes en physique des particules.

Bibliographie

Pérez, J.-P. (2016). *Relativité : Fondements et applications.* Troisième édition. Dunod.

Cours de Joël Sornette disponible à l'adresse suivante : http ://joelsornette.fr/ressources/textes/cours207-1b.pdf