Eléments de cinématique relativiste

Cette leçon traite de quelques éléments de base de la cinématique relativiste et peut servir d'introduction à ce sujet. Elle sera présentée dans le cadre d'un oral de fin de semestre du M1 Physique, parcours de préparation à l'agrégation, de l'université de Strasbourg. On y traitera notamment des transformations de Lorentz, du concept d'intervalle entre deux événements, ainsi que certains phénomènes étranges, que la physique relativiste a mis en évidence, qui sont la dilatation des durées et la contraction des longueurs. Ensuite, une partie sera consacrée aux vitesses et aux accélérations.

1 Limites de la physique classique

Soit R un référentiel galiléen, et R' un référentiel d'axes parallèles à ceux de R, en translation rectiligne uniforme par rapport à R selon l'axe x à la vitesse $\vec{v_e}$ tel que $\vec{v_e} = v_{\vec{R'/R}} = v_e \vec{e_x}$ En physique classique pour déduire les coordonnées d'un événement E dans $R'(x', y', z', t')$ à partir de celles dans $R(x, y, z, t)$, et inversement, on applique les transformations de Galilée, qui sont très simples et sont liées à la loi d'additivité des vitesses :

$$\begin{cases} x = x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

On notera également l'universalité du temps ($t' = t$) signifiant que le temps est absolu (il s'écoule à la même vitesse dans tous les référentiels). Cependant, les découvertes en électromagnétisme établies dans la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$siècle (équations de Maxwell) et surtout les expériences de Michelson et Morley à la fin de celui-ci (avec la construction d'un interféromètre) ont conduit à penser que la vitesse de la lumière (notée c comme "célérité", et évaluée à 299 792 458 mètres par seconde) était la même dans tous les référentiels galiléens, et que cette vitesse était une vitesse limite, infranchissable pour un objet matériel. Ceci est en contradiction avec les transformations de Galilée et la loi d'additivité des vitesses puisqu'on ne trouve aucune trace dans celles-ci de l'existence d'une vitesse limite et unique pour tout référentiel. Par exemple, prenons un photon se déplaçant le long de l'axe x à la vitesse c dans le référentiel R'. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = c$$

L'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel fait que le photon devrait aussi avoir la vitesse c selon l'axe x dans R, nous devrions trouver donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c$. Or nous trouvons par la transformation de Galilée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_e t') = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v_e t') \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c + v_e \neq c!$$

Le modèle des transformations de Galilée n'étant donc plus en accord avec l'expérience, il devient nécessaire de le remplacer par un nouveau type de transformation qui tienne compte de ce phénomène.

2 Transformations de Lorentz

On va déterminer un nouveau système de transformations qui puisse rendre compte des phénomènes suivants :

— 1 : Le référentiel R' se déplace à la vitesse v_e selon l'axe x par rapport à R, ce mouvement est réciproque

— 2 : Un objet soumis à aucune force a un mouvement rectiligne uniforme dans les deux référentiels

— 3 : La vitesse de la lumière doit être la même, égale à c dans les deux référentiels.

La condition 1 reprécise le contexte que nous avons employé jusque-là. La condition 2 s'écrira, pour un point matériel se déplaçant à la vitesse v dans R et v' dans R' :

$$x = x_0 + vt$$

$$x' = x'_0 + v't'$$

où les deux x_0 correspondent à la position du point à l'origine des temps soit dans R soit dans R'. On cherche un moyen de transformer chaque équation en l'autre équation (pour trouver (x, t) à partir de (x', t')) La forme de ces équations indique que la transformation aura l'allure suivante :

$$x = Ax' + Bt'$$

$$t = Cx' + Dt'$$

où A, B, C et D sont des coefficients à déterminer pour pouvoir construire la nouvelle transformation. Considérons alors le déplacement du point origine de R' à la vitesse v_e dans le référentiel R. Sa coordonnée x' dans R' sera toujours égale à zéro. Sa coordonnée x dans R sera elle égale à $v_e t$. Dans le cas où les origines des deux référentiels coïncident à l'origine des temps, on a $x_0 = 0$ pour ce point, dans le référentiel R ; on peut alors écrire :

$$x = 0 + v_e t = A \times 0 + Bt' \Leftrightarrow v_e t = Bt'$$

$$t = C \times 0 + Dt'$$

donc

$$v_e Dt' = Bt' \Leftrightarrow B = v_e D$$

Ce qui permet déjà d'éliminer une inconnue sur les quatre. Considérons maintenant le déplacement de l'origine de R dans R' (réciprocité du déplacement). Sa coordonnée dans R est donc égale à zéro et sa coordonnée dans R' égale à $-v_e t'$ On a les équations suivantes :

$$x = 0 = A(-v_e t') + Bt' \Leftrightarrow -Av_e t' + v_e Dt' = 0 \Leftrightarrow A = D$$

On a éliminé une inconnue supplémentaire. Pour récapituler, la transformation a maintenant cette allure :

$$\begin{cases} x = A(x' + v_e t') \\ t = Cx' + At' \end{cases}$$

Reste à déterminer C et A. Pour cela nous allons invoquer la troisième condition. Imaginons qu'un émetteur situé à l'origine de R émette une onde lumineuse à $t = 0$ (on rappelle qu'on prend la même origine des temps pour R et R', et que les origines spatiales de R et R' coïncident au début de l'expérience : l'émission de l'onde lumineuse a donc aussi lieu à l'origine de R' à $t' = 0$) Cette onde atteint un détecteur P, situé en x_p dans R et dans x'_p dans R', aux temps t_p dans R et t'_p dans R'. L'onde se propageant à la vitesse c dans les deux référentiels, on doit avoir :

$$x_p^2 = c^2 t_p^2$$

$$x_p'^2 = c^2 t_p'^2$$

En appliquant nos transformations sur l'événement de la détection de l'onde lumineuse dans les deux référentiels, on obtient les équations suivantes :

$$x_p^2 = c^2 t_p^2 \Leftrightarrow A^2(x'_p + v_e t'_p)^2 = c^2 \times (Cx'_p + At'_p)^2$$

On développe :

$$A^2(x_p'^2 + 2x_p' v_e t_p' + v_e^2 t_p'^2) = c^2(C^2 x_p'^2 + 2Cx_p' A t_p' + A^2 t_p'^2)$$

On va ensuite chercher à procéder à l'identification $x_p'^2 = c^2 t_p'^2$. Pour-ce-faire on regroupe les termes :

$$(A^2 - c^2C^2)x_p'^2 + (2A^2 v_e - 2ACc^2)x_p' t_p' = A^2(c^2 - v_e^2)t_p'^2$$

On rappelle qu'on doit avoir $x_p'^2 = c^2 t_p'^2$. Cela nous conduit à écrire que :
- 1 : $(A^2 - c^2C^2)$ doit être égal à 1.
- 2 : $(2A^2 v_e - 2ACc^2) \Leftrightarrow 2A(v_e A - Cc^2)$ doit être égal à zéro (pas de termes croisés).
- 3 : $A^2(c^2 - v_e^2)$ doit être égal à c^2.

On peut alors déterminer A par 3 :

$$A^2(c^2 - v_e^2) = c^2 \Leftrightarrow A^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_e^2} = \frac{1}{1 - (\frac{v_e}{c})^2}$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1-(\beta)^2}} \text{ avec } \beta = \frac{v_e}{c}}$$

On peut maintenant déterminer C par 2 :

$$2A(v_e A - Cc^2) = 0 \Leftrightarrow Cc^2 = v_e A \Leftrightarrow C = \frac{v_e A}{c^2}$$

On peut constater que la condition 1 est vérifiée avec les A et C déterminés précédemment :

$$A^2 - c^2C^2 = A^2 - \frac{v_e^2 A^2}{c^2} = A^2(1 - \beta^2) = \frac{1}{1-\beta^2} \times (1 - \beta^2) = 1$$

On a ainsi déterminé complètement tous les coefficients de la transformation. Elle s'écrit donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1-(\beta)^2}}(x' + v_e t') \\ t = \frac{v_e}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-(\beta)^2}}x' + \frac{1}{\sqrt{1-(\beta)^2}}t' \end{cases}$$

Pour condenser les notations, posons $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. On écrira alors :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v_e t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v_e}{c^2}x') \end{cases}$$

On aura également tendance, en relativité, à multiplier la dernière ligne par c, de sorte que toutes les grandeurs représentées soient homogènes à des longueurs. Cela donne :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v_e t') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$$

Ces transformations sont les transformations de Lorentz utilisées en physique relativiste en lieu et place de celles de Galilée.

On pourra noter que pour des vitesses très faibles, globalement, γ tend vers 1 et $\frac{v_e}{c^2}$ tend vers zéro. Les transformations de Lorentz sont alors quasi-équivalentes aux transformations de Galilée ($t \approx t'$ et $x \approx x' + v_e t$). De plus, une trace que c est une vitesse limite réside dans le fait que γ n'est réel que si $\beta^2 < 1$, donc si $v_e < c$.

Une des conséquences immédiates de cette transformation est que le temps n'est plus absolu ($t' \neq t$), et qu'il ne s'écoule pas de la même façon dans tous les référentiels ! On peut donc tenter de se mettre à la recherche de nouvelles quantités physiques, qui comme la vitesse de la lumière, sont invariantes par changement de référentiel, afin de pouvoir étudier correctement les phénomènes physiques qui s'y produisent.

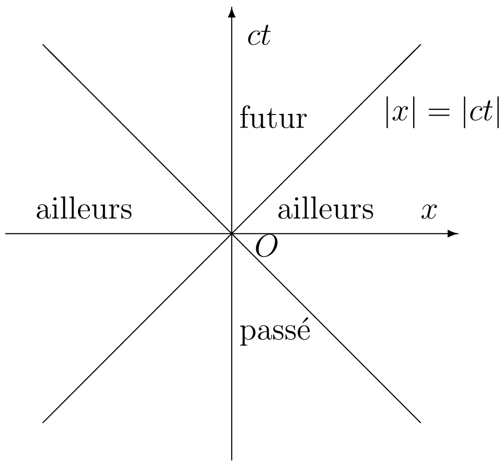
3 Intervalle entre deux événements

C'est alors qu'intervient le concept d'intervalle entre deux événements. On le distinguera de l'intervalle de temps entre deux événements, qui est simplement la différence entre les deux dates de deux événements dans un référentiel, puisque le temps ne s'écoulant pas de la même façon dans tous les référentiels, la durée séparant deux mêmes événements ne sera généralement pas la même si on la mesure dans un référentiel ou dans un autre. On définit alors *l'intervalle entre deux événements* E_1 et E_2 se produisant aux dates t_1 et t_2, noté s_{12} :

$$(s_{12})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Cette quantité est invariante par changement de référentiel via les transformations de Lorentz.
Si $(s_{12})^2 > 0$, l'intervalle est du genre "temps" car la contribution temporelle (avec c, t) est plus grande que la contribution spatiale (avec x, y, z). Les deux événements sont séparés par une distance que pourrait parcourir la lumière

entre les deux dates qui les séparent.
Si $(s_{12})^2 < 0$, l'intervalle est du genre "espace". La lumière n'a pas le temps de parcourir l'espace séparant les deux événements entre les moments où ils se produisent ; un événement ne peut donc pas être la cause de l'autre.
Si $(s_{12})^2 = 0$, l'intervalle est du genre "lumière". Les deux événements pourraient correspondre au passage d'un même photon dans deux détecteurs différents par exemple.



Ce graphique représentant x en fonction de ct est en fait une représentation de l'espace-temps avec une dimension d'espace. On a tracé les courbes d'équation $|x| = |ct|$ qui correspondent à la propagation d'un photon dans toutes les directions, émis en O à $t = 0$ (ici il se propage selon x). Ces courbes ont un aspect de cônes, cela se voit mieux lorsqu'on représente l'espace-temps avec deux dimensions d'espace. On peut alors définir plusieurs zones : l'intérieur du cône correspond aux intervalles du genre temps (l'intervalle en question étant celui entre l'émission du photon en O et un événement quelconque de coordonnées (x, t)) ; L'extérieur correspond intervalles du genre espace.

Le concept d'intervalle sera utilisé pour discuter ci-après de certaines conséquences du principe de relativité, à savoir la contraction des longueurs et la dilatation des durées.

4 Conséquences physiques du principe de relativité

4.1 Dilatation des durées

Maintenant que le temps n'est plus invariant en physique relativiste, on peut chercher à trouver une grandeur, qui elle, serait invariante, et qui reprendrait son rôle. La grandeur en question est la *durée propre* séparant deux événements 1 et 2 , définie comme :

$$\boxed{T_p = \frac{s_{12}}{c}}$$

La durée propre est invariante par construction (rapport de deux grandeurs déjà invariantes). Elle est égale à l'intervalle de temps séparant les deux événements 1 et 2 dans le référentiel où ces deux événements ont lieu au même point (en effet si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$ alors $s_{12} = c(t_2 - t_1)$. Le référentiel en question est qualifié de *référentiel propre*. Tout autre référentiel et toute autre durée mesurée entre ces deux événements sont qualifiés de *référentiel impropre* et de *durée impropre*. Reprenons nos référentiels habituels R et R' : si R' est le référentiel propre les coordonnées x'_1 et x'_2 des événements 1 et 2 sont égales. La transformation de Lorentz indique que :

$$ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x'_1); ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2)$$

On obtient facilement que :

$$t_2 - t_1 = \frac{\gamma}{c}(ct'_2 + \beta x'_2 - ct'_1 - \beta x'_1) = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

Ce qui s'écrit donc

$$T_i = \gamma T_p$$

En conséquence, la durée propre est la durée *minimale* mesurable entre deux événements puisque γ est toujours supérieur à 1. On a ainsi mis en évidence le phénomène de dilatation des durées, qui est un phénomène bien réel et qui doit absolument être pris en compte dans énormément de cas pratiques (en fait tous ceux dans lesquels on étudie des objets se déplaçant à très grande vitesse, ou exigeant une grande précision, telle que des particules dans des accélérateurs, ou des satellites de géolocalisation).

4.2 Contraction des longueurs

De manière similaire à ce qui a été fait pour aborder la notion de durée propre, on va également parler de *longueur propre* et de *référentiel propre* vis-à-vis de la longueur. La longueur propre d'un objet est tout simplement la longueur de cette objet mesurée par un observateur qui est fixe par rapport à lui ; toute autre longueur mesurée par un observateur non fixe par rapport à l'objet est qualifiée de *longueur impropre*.

Reprenons une fois encore les deux référentiels R et R', dans la situation où l'objet est fixe dans R' et donc en translation rectiligne uniforme à la vitesse v_e dans R. Pour mesurer la longueur d'une barre par exemple, on la différence entre les abscisses x_1 et x_2 de ses extrémités pour un même instant. Cela correspond à deux événements : E_1 : "présence de l'extrémité 1 en x_1", et E_2 : "présence de l'extrémité 2 en x_2", sachant que ces deux événements sont simultanés dans le référentiel où la mesure est faite. Dans R on a :

$$E_1 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct_1 \\ x_1 \end{array} \right. \qquad E_2 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct_2 \\ x_2 \end{array} \right.$$

Dans R' on a :

$$E_1 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct'_1 \\ x'_1 \end{array} \right. \qquad E_2 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct'_2 \\ x'_2 \end{array} \right.$$

En utilisant les transformations de Lorentz on a :

$$E_1 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \end{array} \right. \qquad E_2 \quad {}_R\left| \begin{array}{l} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) = \gamma(ct_1 - \beta x_2) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) = \gamma(x_2 - \beta ct_1) \end{array} \right.$$

On a remplacé t_2 par t_1 dans les expressions car les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans R. On obtient que :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \Leftrightarrow (x_2 - x_1) = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1)$$

En notant L_p la longueur propre et L_i une longueur impropre, on écrit donc finalement :

$$\boxed{L_i = \frac{L_p}{\gamma}}$$

Ainsi toute longueur impropre sera plus courte que la longueur propre, la longueur propre est la longueur maximale de l'objet que l'on peut mesurer.

5 Transformation einsteinienne des vitesses et accélérations

5.1 Vitesses

Nous pouvons exprimer les vitesses d'un objet dans un référentiel et trouver, par les transformations de Lorentz, leur expression dans un autre référentiel. Reprenons encore le cas où R' est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $v_e\vec{e_x}$ dans R. En coordonnées cartésiennes, les vitesses ont l'allure suivante :

$$\vec{v}\ {}_R\left|\begin{array}{l} v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{array}\right. ; \vec{v'}\ {}_{R'}\left|\begin{array}{l} v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \\ v'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \\ v'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \end{array}\right.$$

On peut exprimer les divers éléments différentiels par la transformation de Lorentz :

$$\mathrm{d}x = \gamma(\mathrm{d}x' + \beta c\mathrm{d}t'); \mathrm{d}y = \mathrm{d}y'; \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'; c\mathrm{d}t = \gamma(c\mathrm{d}t' + \beta \mathrm{d}x')$$

On peut ainsi trouver les expressions des diverses vitesses dans R en fonction de celles dans R' tout simplement en divisant les éléments $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ par $\mathrm{d}t$. On obtient par exemple pour la coordonnée x :

$$\frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x' + \beta c\mathrm{d}t')}{\gamma(c\mathrm{d}t' + \beta\mathrm{d}x')} = \frac{\frac{1}{\mathrm{d}t'}}{\frac{1}{\mathrm{d}t'}}\frac{(\mathrm{d}x' + \beta c\mathrm{d}t')}{(c\mathrm{d}t' + \beta\mathrm{d}x')} = \frac{v'_x + v_e}{c + \beta v'_x} = \frac{v'_x + v_e}{c(1 + \frac{v_e}{c^2}v'_x)} \Rightarrow v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + \frac{v_e}{c^2}v'_x}$$

En procédant de manière tout-à-fait analogue avec les autres coordonnées, on obtient :

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v_e v'_x/c^2)}; v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + v_e v'_z/c^2}$$

Ainsi les formules de transformation des vitesses sont établies

5.2 Accélérations

Maintenant que nous disposons des formules de transformation des vitesses, il est possible de faire de-même avec les accélérations, en procédant de manière similaire. Pour ce qui est de la coordonnée a_x :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \text{ et } a'_x = \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{v'_x + v_e}{1 + \beta v'_x/c}\right)$$

Sachant qu'on a :

$$c\mathrm{d}t = \gamma(c\mathrm{d}t' + \beta\mathrm{d}x') = \gamma c\mathrm{d}t'(1 + \beta v'_x/c)$$

On obtient :

$$a_x = \frac{1}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{v'_x + v_e}{1+\beta v'_x/c}\right) = \frac{1}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \times \frac{a'_x(1+\beta v'_x/c) - (v'_x + v_e)\beta a'_x/c}{(1+\beta v'_x/c)^2}$$

$$a_x = \frac{a'_x(1+\beta v'_x/c) - \beta v'_x a'_x/c - \beta v_e a'_x/c}{\gamma(1+\beta v'_x/c)^3} = \frac{(1-\beta^2)a'_x}{\gamma(1+\beta v'_x/c)^3} = \frac{a'_x}{\gamma^3(1+\beta v'_x/c)^3}$$

En procédant de la même façon avec les composantes a_y et a_z, on trouve les résultats suivants :

$$a_y = \frac{a'_y + \beta(v'_x a'_y - v'_y a'_x)/c^2}{\gamma^2(1+\beta v'_x/c^3}; a_z = \frac{a'_z + \beta(v'_x a'_z - v'_z a'_x)/c^2}{\gamma^2(1+\beta v'_x/c^3}$$

Et les formules de transformation des accélérations sont ainsi établies.

6 Conclusion

Ce cours part de la physique classique, en présente les limites, pour ensuite démontrer les transformations de Lorentz qui sont à la base de la physique relativiste. Ensuite les conséquences physiques du principe de relativité que sont la dilatation des durées et la contraction des longueurs, ont été discutées, à travers leur formalisme mathématique déduit des transformations de Lorentz. Par la suite ont été établies les formules de transformation des vitesses et des accélérations.

Il pourrait servir d'introduction à partir du niveau L2, voire L3, puisqu'il demande une relative aisance avec certains des concepts déjà établis de la mécanique classique qui ne sont vus qu'en L1 ou L2. Il ne traite pas en revanche de certains points très importants pour bien saisir la relativité restreinte : en effet je n'ai pas parlé du formalisme du quadrivecteur et n'ai abordé le concept d'espace-temps que de manière très succincte. Je vous invite à aller piocher par vous-même quelques cours sur ces sujets, comme ceux que vous pourrez trouver dans [1] s'il vous intéressent, en attendant que je puisse moi-même étendre un peu ce texte.

Références

[1] José-Philipe Pérez. *Relativité, Fondements et applications, 3^eédition. Dunod*, 2017.