

Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde

Une leçon de Physique pour l'agrégation

Arnaud Dupont

11 décembre 2020

Niveau L2. Prérequis : Physique des ondes, diffraction, interférences, ondes électromagnétiques, relations de Planck-Einstein, niveaux d'énergie.

Résumé

Dans cette leçon on va inclure certaines notions : Dualité onde-corpuscule pour la lumière, ce qui permet de tirer certaines idées qui seront généralisées à la matière grâce à M. De Broglie. La fonction d'onde se conçoit alors comme une maturation des travaux de De Broglie et permet une étude plus poussée des systèmes quantiques.

Table des matières

1	Retour sur la dualité onde-corpuscule pour la lumière	2
2	Généralisation : le postulat de De Broglie.	3
2.1	Contenu du postulat et ordres de grandeur	3
2.2	Une introduction à l'indétermination quantique.	5
3	La fonction d'onde	6
3.1	Définition. Equation de Schrödinger	6
3.2	Description d'une particule quantique en termes de fonction d'onde	7
3.3	Etats d'une particule dans un potentiel stationnaire	8

Introduction

Les études de la diffraction et des phénomènes d'interférences de la lumière menées au XIX^{ème} siècle ont montré que la lumière comportait une nature ondulatoire. Plus tard, d'autres expériences telles que la mise en évidence des effets photoélectrique et Compton ont permis de constater qu'elle avait aussi un aspect corpusculaire, apparemment en contradiction avec le premier aspect ; ces deux aspects coexistent pourtant de manière intrinsèque, c'est la dualité onde-corpuscule. Nous allons dans un premier temps voir comment on peut unir conceptuellement ces deux aspects, comment cette dualité onde-corpuscule s'applique à toute la matière, puis discuter de ses conséquences.

1 Retour sur la dualité onde-corpuscule pour la lumière

Lorsqu'on fait traverser des fentes d'Young par un faisceau lumineux (produit par exemple par un LASER), associé à une onde monochromatique on peut observer en sortie, au moyen d'un écran, un ensemble de franges claires et sombres : cette figure s'interprète comme le résultat d'un caractère ondulatoire de la lumière, faisant appel aux phénomènes de diffraction et d'interférences. Cependant d'autres expériences montrent que la lumière présente aussi un caractère corpusculaire : l'effet photoélectrique, l'effet Compton... Ces observations peuvent être expliquées en considérant la lumière comme un flux de particules (les photons). Comment ces deux aspects sont-ils liés ?

Une variante de l'expérience des fentes d'Young consiste à envoyer des photons uniques, un par un, au travers du dispositif interférentiel des fentes d'Young et d'observer leur point d'impact sur l'écran en sortie. On observe l'évolution de la figure sur l'écran à mesure que les photons arrivent l'un après l'autre. Dans une telle expérience, voici ce que l'on peut observer (voir [1], [3], [5]) :

- Quand seulement quelques photons ont été lancés, on observe des points d'impact éparpillés répartis de manière aléatoire sur l'écran, ce qui est en accord avec une description corpusculaire du rayonnement.

- Au bout de plusieurs centaines d'impacts, on commence à discerner des franges similaires aux franges d'interférences, ce qui montre que la nature ondulatoire de la lumière entre pourtant en jeu malgré l'envoi de corpuscules isolés.
- Après un très grand nombre d'impact on peut observer une répartition quasi-continue des impacts qui donne la figure d'interférences habituelle expliquée par la théorie ondulatoire.

Dans la théorie ondulatoire, on montre que l'éclairement en chaque point de l'écran est proportionnel au module au carré du champ électrique en ce point : $I(x) \propto |E(x)|^2$. On peut calculer $|E(x)|^2$ au moyen de la théorie ondulatoire. Ces résultats permettent d'arriver aux conclusions suivantes :

- L'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire de la lumière sont intrinsèquement liés.
- L'onde détermine la probabilité de présence du corpuscule.
- L'intensité lumineuse en un point de l'écran apparaît comme proportionnelle à la probabilité d'impact du photon en ce point.

L'union entre la nature corpusculaire et la nature ondulatoire peut alors apparaître : l'onde va déterminer la probabilité de présence du corpuscule.

2 Généralisation : le postulat de De Broglie.

2.1 Contenu du postulat et ordres de grandeur

Historiquement : L'étude des spectres d'émission et d'absorption des atomes a montré que ceux-ci étaient constitués de raies fines. Autrement dit les photons émis ou absorbés par ces atomes étaient d'énergies bien déterminées, ce qui peut s'expliquer par la quantification des niveaux d'énergie de l'atome. C'est pour expliquer l'origine de cette quantification que Louis De Broglie postule en 1924, par analogie avec les modes propres d'un oscillateur comme une corde vibrante ou une cavité résonante, qu'à chaque particule de matière est associée une onde (onde de matière, onde de De Broglie, onde de probabilité... Différents noms existent). Cette onde serait au corpuscule de matière ce que l'onde électromagnétique est au photon. On généralise ainsi la dualité onde-corpuscule à toute la matière.

Contenu du postulat et conséquences : La longueur d'onde de De Broglie est donnée par :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

où l'expression de p est à choisir de manière adéquate en fonction du problème considéré (relativiste ou non relativiste notamment). L'association d'une onde à chaque particule de matière de la même manière qu'avec la lumière peut suggérer que l'on peut observer des phénomènes de diffraction (et autres spécificités ondulatoires) semblables à ceux constatés sur la lumière, avec des faisceaux de particules de matière telles que des électrons, voire des atomes, des molécules, etc.

Confirmations expérimentales. Exemples de calculs Peu après la théorisation du postulat d'onde de matière, Davisson et Germer parviennent à réaliser des figures de diffraction au moyen d'un faisceau d'électrons projeté sur un cristal de nickel. Cette confirmation expérimentale de l'hypothèse de De Broglie amènera celui-ci à finir lauréat du prix Nobel en 1929 pour ces découvertes. Davisson recevra lui aussi le prix Nobel au cours de sa carrière.

Dans les années 30 et les décennies suivantes jusqu'à nos jours, des expériences de diffraction ont été menées avec des objets microscopiques divers : atomes d'hélium, neutrons, molécules de fullérène... Apportant davantage de preuves expérimentales du bien-fondé du postulat.

Exemple de calcul 1 : Calcul de la longueur d'onde de De Broglie des électrons diffractés lors de l'expérience de Davisson et Germer.

Les électrons étaient accélérés au moyen d'une tension de 54V. Leur énergie cinétique valait donc $54eV$, donc $8,6 \times 10^{-18}J$ ce qui correspond à une vitesse (dans le cas classique) de $\sqrt{2 \times \frac{8,6 \times 10^{-18}}{9,1 \times 10^{-31}}} = 4,4 \times 10^6 m \cdot s^{-1}$. Cela donne une longueur d'onde de De Broglie de $1,68 \times 10^{-10}m$ ce qui est en adéquation avec la diffraction par un cristal (ordre de grandeur du paramètre de maille).

Exemple de calcul 2 : Calcul de la longueur d'onde de De Broglie d'un neutron « thermique ». Un neutron à l'état gazeux a une énergie cinétique valant $\frac{3}{2}k_B T$. Sa longueur d'onde de De Broglie vaut en conséquence $\frac{h}{\sqrt{3m_n k_B T}} \approx 1,4\text{\AA}$ ce qui explique que l'on puisse obtenir des figures de diffraction avec des neutrons également. Ce fut réalisé quelque peu après les

expériences de Davisson et Germer. Notez que la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la racine carrée de la température lorsqu'on applique la théorie cinétique des gaz, un élément d'explication au fait que refroidir un système à des températures très basses permet de voir se manifester certains effets quantiques tels que la superfluidité...

Exemple de calcul 3 : Calcul de la longueur d'onde de De Broglie d'une Twingo. C'est un calcul quelque peu naïf et donc on ne tirera pas grand-chose de valable sur le plan théorique (surtout dans la mesure où une voiture n'est pas composée d'une unique particule). Mais essayons quand-même : une voiture d'une tonne se déplaçant à 50km/h a une longueur d'onde de De Broglie de l'ordre de $10^{-38}m$. Ceci explique qu'on ne voit pas les effets quantiques à notre échelle. En effet la longueur d'onde est si petite qu'il serait extrêmement compliqué de réaliser des phénomènes de diffraction avec cette voiture (pour rappel un atome a un diamètre d'environ $10^{-10}m$)...

Au sujet de l'échelle quantique. Les calculs précédents donnent une petite idée de comment caractériser les conditions dans lesquelles le caractère quantique de la matière se manifeste de telle façon qu'il faudra utiliser les outils de la physique quantique pour l'étudier de manière pertinente. Pour discriminer les deux cas de figure, on peut calculer la longueur d'onde de De Broglie du sujet de l'étude : si celle-ci est très inférieure à la dimension des corps avec lesquels le système étudié interagit, alors on ne ressentira pas d'effet "quantique" (la diffraction requiert que l'onde incidente ait une longueur d'onde de l'ordre de la taille de l'objet diffractant).

2.2 Une introduction à l'indétermination quantique.

Un petit raisonnement sur l'expérience de diffraction par une fente permet d'introduire le principe d'indétermination d'Heisenberg. La conséquence de ce principe est qu'on est contraints d'abandonner la description classique du mouvement d'une particule en variables de position et quantité de mouvement quand on s'intéresse à des objets quantiques, étant donné l'impossibilité fondamentale de connaître simultanément ces variables avec précision.

3 La fonction d'onde

Ces éléments amènent à conclure qu'il devient nécessaire, à « l'échelle quantique », de substituer au concept classique de la trajectoire celui de probabilité de présence.

3.1 Définition. Equation de Schrödinger

A partir du concept d'onde de matière introduit par De Broglie, Erwin Schrödinger va proposer en 1926 celui de la *fonction d'onde* : Chaque particule est caractérisée par une fonction d'onde, fonction de l'espace et du temps, à valeurs complexes, qui contient toutes les informations nécessaires pour caractériser l'état d'une particule à un instant donné. En particulier son module au carré représente la *densité de probabilité de présence* à l'instant et au point considéré, de la particule.

La fonction d'onde, notée ψ , est solution de *l'équation de Schrödinger* qui est une équation fondamentale que l'on ne démontre pas :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t)$$

avec H l'opérateur hamiltonien :

$$H\psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$$

Au sujet de l'équation de Schrödinger. Propriétés intéressantes :

Cette équation est linéaire, ce qui signifie qu'une combinaison linéaire de solutions est également une solution. Cela signifie qu'on pourra décrire une particule par un *paquet d'onde*, une somme de fonctions d'onde solutions de l'équation de Schrödinger. De plus cette équation est du premier ordre en temps, ce qui fait que si une solution est connue en un temps t_0 son évolution sera déterminée à tout instant ultérieur.

Normalisation des fonctions d'onde. On l'a dit, le module au carré de la fonction d'onde est la *densité de probabilité de présence de la particule*. C'est pourquoi on doit s'assurer que la fonction d'onde soit *normalisée*, car une probabilité est traduite mathématiquement par un nombre compris entre 0 et 1 ; en outre, il est logique que la somme des probabilités de présence d'une

particule en tous les points de l'espace vale 1. Ce qui mène à la condition suivante sur les fonctions d'onde :

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$$

Ce qui implique une chose importante, à savoir qu'une fonction d'onde, pour avoir un sens physique, doit être *de carré sommable* (autrement dit, il faut que l'intégrale écrite ci-dessus existe).

3.2 Description d'une particule quantique en termes de fonction d'onde

Reprenons l'équation de Schrödinger et plaçons-nous dans le cas d'un potentiel nul, correspondant au cas pratique d'une particule libre :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Cette équation différentielle admet des solutions de la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

où \vec{k} vérifie la relation :

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Ce type de solution est une « onde plane. » On peut remarquer qu'elle correspond à une densité de probabilité de présence uniforme dans l'espace (module au carré constant).

Le principe de superposition appliqué à l'équation de Schrödinger conduit à représenter une particule comme une superposition d'ondes planes, un « paquet d'ondes. »

A noter : une onde plane n'est pas de carré sommable, en revanche une somme d'ondes planes peut être de carré sommable.

La fonction d'onde d'une particule se représente comme un paquet d'ondes, ce qui donne une relation de la forme suivante si on se résume à une dimension d'espace :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

On peut noter qu'à $t = 0$ la fonction $g(k)$ apparaît comme la transformée de Fourier de $\psi(x, 0)$ (notez le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ choisi convenablement à cet effet).

Evolution d'un paquet d'ondes. On mentionnera la vitesse de groupe, et la vitesse de phase. La vitesse de phase est la vitesse de propagation d'une seule onde. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de tout le paquet d'ondes. Si les différentes ondes du paquet ont des vitesses de propagation différentes, la vitesse de groupe (celle du paquet) se distingue de la vitesse de phase, et la vitesse de groupe représente le déplacement du "centre" du paquet d'onde. Lorsque des ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation dans un même milieu, on dit qu'il y a *dispersion*.

La vitesse de phase V_φ d'une onde plane est la suivante :

$$V_\varphi(k)$$

On constate cependant que la vitesse de phase dépend de k d'après la condition évoquée sur les solutions de l'équation de Schrödinger (relation de dispersion) :

$$V_\varphi(k) = \frac{\hbar k}{2m}$$

La vitesse de groupe est donnée par la relation suivante :

$$V_G = \frac{d\omega}{dk}$$

3.3 Etats d'une particule dans un potentiel stationnaire

Partons à la recherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger, solutions de la forme suivante :

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\chi(t)$$

Remarque : à la différence d'un état stationnaire rencontré en physique des ondes, $\varphi(\vec{r})$ et $\chi(t)$ peuvent être à valeurs complexes.

En incorporant cette solution dans l'équation de Schrödinger, on trouve :

$$i\hbar\varphi(\vec{r})\frac{d\chi(t)}{dt} = \chi(t)\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r})\right) + \chi(t)V(\vec{r})\varphi(\vec{r})$$

En divisant par $\varphi(\vec{r})\chi(t)$ on obtient :

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r})\right) + V(\vec{r})$$

Dans cette équation, le membre de gauche ne dépend que d'une variable, le temps, et celui de droite que d'une autre variable, la position. En conséquence les deux membres de cette équation doivent être égaux à une constante : on la posera égale à $\hbar\omega$. D'après les relations de Planck-Einstein, $\hbar\omega = E$.

On peut donc obtenir deux équations à partir de la précédente, l'une portant sur $\chi(t)$ et l'autre sur $\varphi(\vec{r})$. De ces deux équations on déduit facilement que :

$$\chi(t) = Ae^{-i\omega t} = Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

La constante A peut être déplacée dans la fonction $\varphi(\vec{r})$.

De l'autre équation on déduit *l'équation de Schrödinger indépendante du temps* :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$

On a ainsi *séparé les variables* d'espace et de temps.

Une solution de l'équation de Schrödinger s'écrira ainsi :

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})e^{-i\omega t} = \varphi(\vec{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Voyons maintenant comment utiliser l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans un cas de potentiel stationnaire simple : le puits de potentiel infini.

Puits de potentiel infini. C'est un potentiel qui est nul entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ et qui est infini au-delà. L'équation de Schrödinger devrait convaincre que dans les régions où le potentiel est infini, la fonction d'onde doit être nulle. C'est un potentiel très « schématique » qui peut cependant servir d'approximation pour certains cas réels.

Relations de continuité de la fonction d'onde. La fonction d'onde doit être continue même en présence de discontinuités du potentiel. Dans de nombreux cas d'étude, la première dérivée spatiale $\frac{d\varphi}{dx}$ l'est aussi ; ce n'est cependant plus vérifié si le potentiel a une valeur infinie. Les dérivées d'ordre supérieur peuvent présenter des discontinuités là où le potentiel est discontinu. Une démonstration de ces relations est donnée dans la référence [1]. Dans la situation à laquelle on s'intéresse ici donc, la fonction d'onde est continue en 0 et L .

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit, dans l'intervalle où le potentiel est nul :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi$$

Cette équation différentielle a des solutions de la forme suivante :

$$\varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. La conditions de continuité en $x = 0$ conduit à $A = 0$. Celle en $x = L$ amène une règle de quantification :

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

On a donc plusieurs fonctions propres (voir l'analogie avec les modes propres d'une corde vibrante), chaque fonction propre étant caractérisée par l'indice n . De plus les énergies sont aussi quantifiées de par la relation entre k et E :

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Remarque : Les valeurs de n et $-n$ conduisent au même état (la seule différence est un facteur de phase) et la valeur $n = 0$ conduit à une fonction d'onde nulle en tout point (donc inintéressante) ce qui permet de faire des conclusions intéressantes comme celle d'une énergie fondamentale non nulle pour la particule (énergie pour $n = 1$).

La condition de normalisation impose (le calcul de l'intégrale entre 0 et L n'est pas compliqué) :

$$\begin{aligned} \int_0^L |B \sin(kx)|^2 dx &= 1 \\ B^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx &= 1 \\ B^2 \int_0^L \frac{1 - \cos(2kx)}{2} dx &= 1 \\ B &= \sqrt{\frac{2}{L}} \end{aligned}$$

Finalement les fonctions propres de la particule dans le puits de potentiel s'écrivent, en ajoutant $\chi(t)$:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$$

4 Conclusion

La dualité onde-particule, d'abord mise en évidence sur la lumière, puis sur la matière après les travaux de De Broglie, est un des fondements de la mécanique quantique. Elle contraint, dans les domaines où elle se fait prédominante, c'est-à-dire où le caractère ondulatoire de la matière est manifeste par l'apparition de phénomènes propres à l'onde, à utiliser un formalisme très différent de la mécanique classique pour traiter les problèmes physiques, en particulier l'emploi d'une fonction d'onde pour caractériser l'état d'une particule, amenant à représenter les particules comme des superpositions d'ondes planes, les paquets d'ondes.

Cette nature particulière, ce nouveau point de vue sur la matière, amènera à l'étude de phénomènes singuliers, pourtant aujourd'hui attestés par l'expérience, tels que l'effet tunnel.

Bibliographie

- [1] COHEN-TANNOUJDI Claude, DIU Bernard, LALOË Franck. *Mécanique quantique*. Nouvelle édition. Tome I. CNRS Editions, 2018.
- [2] ANTOINE Charles. *Introduction à la physique quantique*. Dunod, 2020.
- [3] SALAMITO Bernard, CARDINI Stéphane, JURINE Damien, SANZ Marie-Noëlle. *Physique PCSI Tout-en-un*. 5^{ème} édition. Dunod, 2019 (J'intègre).
- [4] SALAMITO Bernard, CARDINI Stéphane, JURINE Damien, SANZ Marie-Noëlle. *Physique PC-PC* Tout-en-un*. 5^{ème} édition. Dunod, 2019 (J'intègre).
- [5] *Single Photon Interference Double Slit*, sur la chaîne YouTube Physics Demos. <https://www.youtube.com/watch?v=e30BuTnhJng>

Quelques critiques émises lors de la présentation de la leçon

Calculer la longueur d'onde de De Broglie de la voiture est un exemple un peu risqué, très caricatural et approximatif. On pourrait se dire qu'une fois garée devant un supermarché, l'impulsion de la voiture devient nulle donc sa longueur d'onde de De Broglie tend vers l'infini : c'est oublier qu'une voiture est constituée d'un nombre très important de particules qui sont soumises dans tous les cas à l'agitation thermique (préférez attendre l'hiver si vous tenez à voir des effets quantiques avec votre véhicule). On peut préférer donner d'autres ordres de grandeur réels et plus pertinents.

Dans le puits de potentiel infini, les énergies (et donc les impulsions) sont quantifiées, donc en théorie connues avec une précision infinie. Cependant on peut aussi quantifier une précision donnée sur l'emplacement de la particule (elle doit se trouver dans le puits de largeur L). Comment résoudre ce dilemme sans frustrer M. Heisenberg? La réponse est que l'onde de probabilité dans le puits est stationnaire, donc issue de la somme de deux ondes de sens de propagation opposés. En conséquence de quoi à un état d'énergie donné correspondent deux impulsions (une positive et l'autre négative). Ce qui donne une indétermination sur l'impulsion de la particule.

On songera d'ailleurs à garder une démonstration propre du principe d'indétermination de Heisenberg sous le bras.

Une figure pouvant représenter les premières fonctions propres de la particule dans le puits de potentiel, les densités de probabilité de présence et

énergies associées serait la bienvenue.

La pertinence de l'équation de Schrödinger a été établie historiquement car elle permettait de retrouver des niveaux d'énergie connus dans les atomes. Il pourrait être intéressant de relier les résultats trouvés dans le puits de potentiel à des données expérimentales.

On pourrait plus discuter sur les vitesses de phase et de groupe. Un problème rencontré par les solutions de l'équation de Schrödinger est le caractère dispersif de la propagation d'un paquet d'ondes (vitesse de phase dépendant de k); on peut cependant établir par les relations de Planck-Einstein et De Broglie (ne pas oublier la relation $p = \hbar k$) que la vitesse de groupe correspond à la vitesse de déplacement de la particule.

La microscopie électronique est un exemple d'utilisation des ondes de De Broglie.

Le comportement des neutrons peut être approché par le modèle des gaz parfaits (on a employé la théorie cinétique des gaz pour l'exemple de calcul sur le neutron thermique) pour des durées d'expériences pas trop longues; non chargé, petit, assimilable à une « sphère dure », il se désintègre cependant en quelques minutes...

Les expériences montrant le caractère ondulatoire d'un faisceau d'électrons ne peuvent pas se faire au moyen d'une plaque percée de deux fentes rectilignes (fentes d'Young), car les électrons ont tendance à rester collés sur celle-ci. On préfère employer un fil chargé, le champ électrique généré par celui-ci permettant de construire quelque-chose qui s'apparente à un biprisme de Fresnel.

On gardera à l'esprit que l'équation de Schrödinger n'est valable que dans le cadre de la physique *non relativiste*; de plus elle ne tient pas compte des propriétés de spin. Pour traiter les problèmes sortant de ce cadre, les équations de Dirac ou de Klein-Gordon en sont les équivalents à utiliser.

L'intuition de De Broglie l'ayant conduit à écrire sa formule définissant la longueur d'onde de l'onde de matière n'est pas (exactement) divine. On peut retrouver sa formule à partir de la relation de Planck-Einstein et des formules de base de la physique des ondes, celles qui relient la longueur d'onde, la fréquence et la célérité d'une onde.

En changeant de système de coordonnées, on pourra trouver des fonctions d'onde qui, à première vue si on n'a pas trop l'habitude, ne paraissent pas être de carré sommable (exemple : les orbitales atomiques en coordonnées sphériques). C'est oublier la présence de l'élément de volume infinitésimal lors de l'intégration sur tout l'espace ($r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ en coordonnées sphériques)

qui rendra bien l'intégration possible dans certains cas (certaines divergences en $r = 0$ n'ayant alors plus lieu par exemple).