

Phénomènes de transports

Niveau : L3

Prérequis : Echelles micro macro et mésoscopiques, Thermodynamique, analyse vectorielle, électro et magnétostatique, systèmes ouverts

Bibliographie : Physique tout-en un PSI/PSI* Dunod, Thermodynamique Pérez, Thermodynamique Diu, Sujet Agreg épreuve A 2017 <https://nc.agregation-physique.org/index.php/s/XzZWHcEfQjWwD8f?dir=undefined&path=%2F2017&openfile=17353>

Table des matières

Phénomènes de transports	1
1 Transport d'une grandeur physique	1
1.1 Etat d'équilibre local à l'échelle mésoscopique	1
1.2 Les 3 modes de transport	2
2 La diffusion	2
2.1 l'agitation thermique : le "moteur" de la diffusion	2
2.2 Vecteur densité surfacique de courant	2
2.3 Équation de conservation	3
2.4 Lois phénoménologiques	4
2.5 Équation de diffusion	4
3 Application : conduction thermique entre l'atmosphère et une maison	5
3.1 Profil de la température	6
3.2 Puissance perdue dans le mur	6

Introduction : glaçon dans l'eau et thermodynamique

- Nombreux phénomènes physiques mettent en jeu le transport d'une grandeur d'un point de l'espace à un autre au cours du temps : énergie thermique, qté de mouvement, charge électrique ou qté de matière elle-même. Ces grandeurs sont *conservées*
- On cherche à décrire l'évolution de systèmes hors-équilibres \implies non définis par la thermodynamique ($T(t), S(t)$ n'ont pas de sens)

1 Transport d'une grandeur physique

1.1 Etat d'équilibre local à l'échelle mésoscopique

Soit un petit volume mésoscopique δV . On va considérer deux échelles de temps distinctes :

1. Le temps de rétablissement d'équilibre au sein du système δV après une perturbation $\tau_{\text{més}}$.
2. Le temps d'établissement de l'équilibre thermodynamique pour tout le système macroscopique τ_{macro} .

Si $\tau_{\text{macro}} \gg \tau_{\text{més}}$, évolution globale suffisamment lente pour considérer *qu'à chaque instant t , le système est à l'équilibre local*

1.2 Les 3 modes de transport

Convection

Implique un transport macroscopique de matière.

Exemples : agiter le sucre dans une tasse de café, ouvrir la fenêtre et sentir un courant d'air

Rayonnement

Rayonnement exclusivement électromagnétique : tout corps rayonne des photons à certaines longueurs d'ondes et peuvent contribuer à chauffer un corps

Exemple : transfert d'énergie thermique par exposition au soleil.

Diffusion

Souvent le phénomène le plus significatif à prendre en compte.

2 La diffusion

2.1 l'agitation thermique : le "moteur" de la diffusion

Mouvement brownien : https://www.youtube.com/watch?v=NSe3TFLYc08&ab_channel=PaulBaker

C'est le mouvement constant des particules agitées thermiquement qui est à l'origine des phénomènes de diffusion

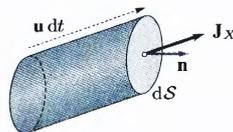
↔ Expérience diffusion de l'encre dans l'eau froide et chaude

Il faut donc s'intéresser au mouvement des porteurs de la grandeur transportée à un niveau mésoscopique : compter les porteurs !

2.2 Vecteur densité surfacique de courant

$$\begin{aligned}\delta^3 N &= n d^3 \tau \\ &= n d\vec{h} \cdot d^2 \vec{S} \\ &= n \vec{v} dt \cdot d^2 \vec{S} \\ &= n \vec{v} \cdot d^2 \vec{S} dt\end{aligned}$$

La surface $d^2 S$ est orientée avec la règle de la main droite.



Finalement :

$$\delta^3 N = \vec{j} \cdot d^2 \vec{S} dt$$

\vec{j} est le nombre algébrique de particules par unité de surface dS durant un temps dt (entre t et $t + dt$). Pour suivre le transport d'une grandeur X , il suffit de multiplier par cette grandeur :

$$\delta^3 X = \vec{j}_X \cdot d^2 \vec{S} dt$$

avec

$$\vec{j}_X = n X \vec{v}$$

Exemples : $\vec{j}_{\text{elec}} = n q \vec{v}$: vecteur densité surfacique de courant électrique

$\vec{j}_{th} = nE_{th}\vec{v}$: vecteur densité surfacique de courant thermique

$\vec{j} = n\vec{v}$: vecteur densité surfacique de courant de particules

Alors on obtient le flux (de particules, d'énergie, de charge) en intégrant sur une surface \mathcal{S} :

$$\phi_X = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_X \cdot d^2\vec{S}$$

2.3 Équation de conservation

On cherche à déterminer la variation du nombre de particules au sein du volume $d\tau$ pendant dt :
Exemple avec la quantité de matière car plus parlant.

$$\begin{aligned} dN &= \pm \phi_N(t) dt \quad ? \\ &= - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} dt \end{aligned}$$

— Si \vec{j} est vers l'extérieur, $\vec{j} \cdot d^2\vec{S}$ est positif. On perd des particules donc δN est négatif

— Si \vec{j} est vers l'intérieur, $\vec{j} \cdot d^2\vec{S}$ est négatif. On gagne des particules donc δN est positif

Alors

$$\frac{dN}{dt} = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

Or

$$N(t) = \iiint_V n(M, t) d^3\tau$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V n(M, t) d^3\tau = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

i.e.

$$\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3\tau = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

Théorème de Green Ostrogradski

$\forall \vec{A}$ et pour un volume V quelconque délimité par une surface \mathcal{S} ,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3\tau$$

Alors :

$$\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3\tau = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3\tau$$

Cela fonctionne pour tout volume V donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Aussi :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{elec}$$

2.4 Lois phénoménologiques

Comment se comporte \vec{j} ?

L'expérience montre que le transfert se fait dans le sens opposé au gradient d'une grandeur intensive.

⇒ barreau métallique plus chaud d'un côté? La diffusion thermique va s'opérer vers les plus basses T .

Loi de Fourier

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad [\text{J.m}^{-2}\text{s}^{-1}] = [\text{W.m}^{-2}]$$

λ $[\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}]$ la conductivité thermique (ex : $\lambda(\text{air à } 25^\circ\text{C}) \sim 10^{-2}$ S.I. $\lambda(\text{eau à } 25^\circ\text{C}) \sim 10$ S.I., $\lambda(\text{métal à } 25^\circ\text{C}) \sim 10^2$ S.I.),

Loi de Fick

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} n \quad [\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}]$$

D $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$ le coefficient de diffusion (ex : $D(\text{eau dans l'air à } 0^\circ\text{C}) \sim 10^{-5}$ S.I. $D(\text{sucrose dans l'eau à } 25^\circ\text{C}) \sim 10^{-10}$ S.I.)

Loi d'Ohm locale dans les conducteurs (modèle classique de Drude)

$$\vec{j}_{elec} = -\sigma \vec{\nabla} V = \sigma E \quad [\text{C.m}^{-2}\text{s}^{-1}]$$

σ $[\text{C.m}^{-1}\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}] = [\text{S.m}^{-1}]$ la conductivité (ex : $\sigma(\text{cuivre}) \sim 10^7$ S.I. et décroît avec T)

Validité

- Approximation au premier ordre (loi linéaire avec dérivée première du mouvement) donc grandeur intensive pas trop élevée
- Grandeur intensive pas trop faible car il doit être possible d'effectuer une moyenne statistique
- Grandeur intensive ne doit pas varier trop rapidement sinon pas le temps de rétablir l'équilibre local
- Matériau isotrope pour que le coefficient soit le même dans toutes les directions

2.5 Équation de diffusion

Sur l'exemple de la diffusion thermique :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th}$$

On fait apparaître T :

$$\mu_{cV} \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th}$$

On injecte la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

$$\mu_{cV} \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T)$$

$$\mu_{cV} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

On introduit

$$D_{th} \equiv \frac{\lambda}{\mu c_V}$$

Finalement on a bien la même forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \nabla^2 T$$

Car avec la loi de Fick

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

Terme source

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) + \mathcal{P}_{th}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \mathcal{P}_{th}$$

$$\mu c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \mathcal{P}_{th}$$

Et l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \nabla^2 T + \frac{\mathcal{P}_{th}}{\mu c_V}$$

Remarques

1. Non invariant par $t \rightarrow -t$ donc IRRÉVERSIBLES (pas étonnant car origine=marche aléatoire)!
2. Le phénomène de diffusion est LENT :

En 1D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

$$\frac{n}{t} \sim D \frac{n}{l^2}$$

$$l \sim \sqrt{Dt}$$

Ex : particule de parfums dans l'air avec $D \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ mettent 1 jour pour parcourir 1 m.

3 Application : conduction thermique entre l'atmosphère et une maison

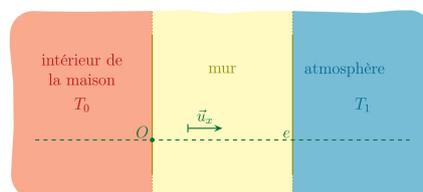


FIGURE 1 – source : http://www.matthieurigaut.net/public/vieux_spe/thd/cours_thd02_prof.pdf

3.1 Profil de la température

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \nabla^2 T + \frac{\mathcal{P}_{th}}{\mu c_V}$$

Pas de production et régime stationnaire donc :

$$0 = \nabla^2 T$$

En 1D

$$T(x) = Ax + B$$

À l'échelle mésoscopique, la température est une fonction continue de l'espace

$$T(x = 0^+) = T(x = 0^-) = T_0 = B$$

Et

$$T(x = e^+) = T(x = e^-) = T_1 = Ae + T_0$$

D'où

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e} x + T_0$$

3.2 Puissance perdue dans le mur

L'énergie est transférée de la pièce vers l'atmosphère donc on oriente la surface vers les +

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \phi_{th} \\ &= \iint_{S_{mur}} \vec{\mathbf{j}}_{th} \cdot d^2\vec{\mathbf{S}} \\ &= \iint_{S_{mur}} -\lambda \vec{\nabla} T \cdot d^2\vec{\mathbf{S}} \\ &= \iint_{S_{mur}} -\lambda \frac{dT}{dx} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} \cdot d^2\vec{\mathbf{S}} \\ &= -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e} \iint_{S_{mur}} d^2S \\ \mathcal{P} &= (T_0 - T_1) \frac{\lambda S}{e} \end{aligned}$$

$\lambda_{btou} \sim 1$ W/mK et $\lambda_{bois} \sim 0.5$ W/mK

Conclusion : transversalité et ouverture sur la méca flu

- Transversalité des phénomènes de transport. Même origine microscopique mais grande diversité d'effets macroscopiques
- La viscosité des fluides est aussi un phénomène de transport d'une quantité conservée fondamentale : la quantité de mouvement.