

Le Pendule de Foucault

Quelques explications

par
Arnaudus Dupontus

9 février 2026

En 1851, la coupole du Panthéon accueille une expérience scientifique majeure, dirigée par le physicien français Léon Foucault : celui-ci invita les badauds à se déplacer pour, je cite, "voir la Terre tourner". Un grand classique de l'enseignement de la Physique, cette expérience est aujourd'hui reproduite en de nombreux endroits en France (à peu près dans tous les musées scientifiques au sens large ; je me souviens assez bien d'un pendule au parc du Près la Rose à Montbéliard, d'un autre dans les bâtiments de l'Université de Strasbourg, assez loin du Panthéon donc), mon but avec cette présentation est d'expliquer aussi clairement que possible la théorie derrière le mouvement particulier du pendule de Foucault, tant dans sa description cinématique, que dans l'étude de la dynamique. Nous pourrons alors répondre à la question : mais qu'est-ce que ce pendule veut bien nous dire ?

Table des matières

1	Premier niveau : une étude dans le référentiel du Panthéon	2
1.1	Présentation du système	3
1.2	Étude dynamique	4
1.2.1	Des vecteurs en apparence compliqués à utiliser mais qui nous sauvent à la fin	5
1.2.2	Interprétation	7
1.2.3	Les limites de l'expérience : ce que met en évidence le pendule de Foucault	8

2	Changement de référentiel et transformation des vitesses et accélérations	9
2.1	Vecteur quelconque et changement de référentiel	10
2.1.1	Translation	10
2.1.2	Rotation	11
2.1.3	Si le vecteur change lui-même dans $\mathcal{R}'$	17
2.1.4	Conclusion	17
2.2	Variation de position, vitesse, accélération par changement de référentiel	18
2.2.1	Vecteur position	18
2.2.2	Vitesse et accélération	19
2.3	Que devient le bilan des forces ?	21
2.3.1	Éléments d'interprétation de ces nouvelles forces	22
3	Étude du pendule de Foucault tenant compte de la non-galiléalité du référentiel du Panthéon	27
3.1	Position du problème et discussion sur le rôle de la force de Coriolis	27
3.2	Vitesse et accélération en trois dimensions	32
3.3	Bilan des forces, projection, et résolution finale	33
4	Conclusion	34
A	Pour mieux comprendre	36

1 Premier niveau : une étude dans le référentiel du Panthéon

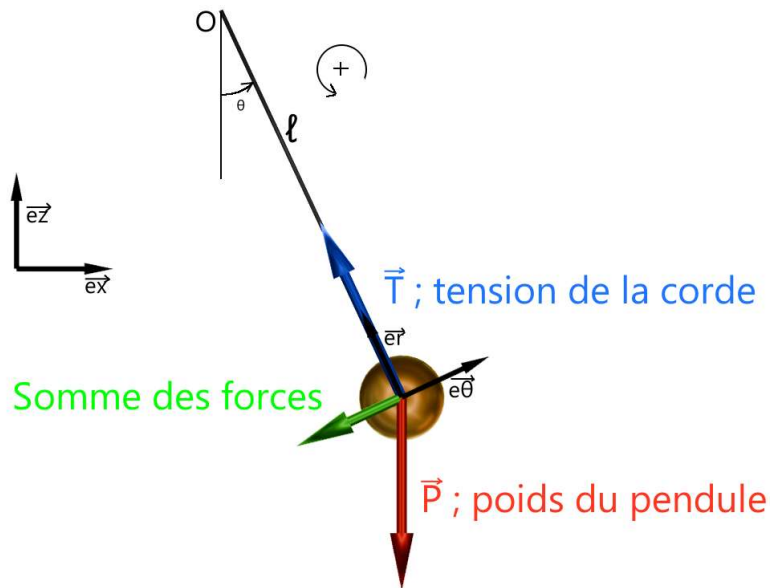
Ce pendule en apparence, de revêt rien de particulier. Hormis peut-être son exceptionnelle longueur : le Panthéon a une hauteur sous voûte exceptionnelle de 67 mètres (à 2 mètres près, on y fait rentrer une tour entière de Notre-Dame de Paris), et la corde à laquelle est attachée ce pendule en prend quasiment toute la longueur. Au bout de la corde, quasiment au ras-du-sol, est accrochée une petite boule en laiton de 28 kg.

Lors du lancement de l'expérience, le pendule était tiré vers le côté : hors de sa position d'équilibre. Il était alors accroché à un support par un mince fil, que l'on vint brûler : cette précaution, qui passerait presque pour

de la maniaquerie, avait pour but de lâcher le pendule sans lui communiquer aucune vitesse initiale. Le pendule évolue alors librement.

Étudions le mouvement de ce pendule dans le Panthéon, en supposant le référentiel du Panthéon, équivalent au référentiel terrestre, galiléen, c'est-à-dire que les lois de Newton y sont valables.

1.1 Présentation du système



Le pendule est soumis à deux forces :

- Son poids $\vec{P}$, dirigé vers le centre de la Terre donc ici vertical vers le bas.
- La tension de la corde $\vec{T}$, que l'on considère inextensible, elle limite donc les mouvements possibles du pendule.

On néglige les frottements de l'air qui s'appliquent sur le pendule, ainsi que les éventuels frottements solides ayant lieu au niveau de l'attache de la corde au sommet de la coupole. L'angle par rapport à la verticale du pendule est nommé θ .

On a représenté deux bases de vecteurs orthonormés pour étudier le mouvement :

- La première, $(\vec{e}_x; \vec{e}_z)$, est la base qu'on utiliserait spontanément pour une étude d'un mouvement dans le référentiel terrestre : des vecteurs constants, l'un vertical, l'un horizontal...

- Mais il sera en vérité plus pratique d'utiliser la base de vecteurs tournante $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$: le premier vecteur est parallèle à la corde et le second y est perpendiculaire. Cette base telle que représentée ici est aussi appelée *base de Frenet*.

1.2 Étude dynamique

Le référentiel étant supposé galiléen, on peut écrire, d'après la seconde loi de Newton, aussi appelé Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse du pendule, $\vec{a}$ l'accélération du pendule, et m sa masse. Autrement dit, la somme des forces extérieures appliquées au système (le pendule) est égale à sa masse que multiplie l'accélération.

Ici on a donc :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T}$$

On projette dans la base de Frenet. On rappelle que pour trouver la coordonnée d'un vecteur selon un vecteur de base, on utilise le produit scalaire, et que la norme des vecteurs de base (orthonormés) est 1. Les coordonnées des vecteurs sont ici écrites en colonne, la première ligne représente la coordonnée selon $\vec{e}_r$ et la seconde la coordonnée selon $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \vec{T} \cdot \vec{e}_r \\ \vec{T} \cdot \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \times \|\vec{e}_r\| \times \cos(0) \\ T \times \|\vec{e}_\theta\| \times \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec T la valeur en Newtons de la force de tension de la corde ;

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \vec{P} \cdot \vec{e}_r \\ \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \times \|\vec{e}_r\| \times \cos(\pi + \theta) \\ P \times \|\vec{e}_\theta\| \times \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

avec P la valeur en Newtons du poids du pendule.

Ainsi il vient d'après la seconde loi de Newton :

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} T - P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Que peut-on tirer de plus à ce stade ? Comment exploiter l'accélération du pendule ? Trouvons son expression dans la base de Frenet, en partant de la position du pendule.

1.2.1 Des vecteurs en apparence compliqués à utiliser mais qui nous sauvent à la fin

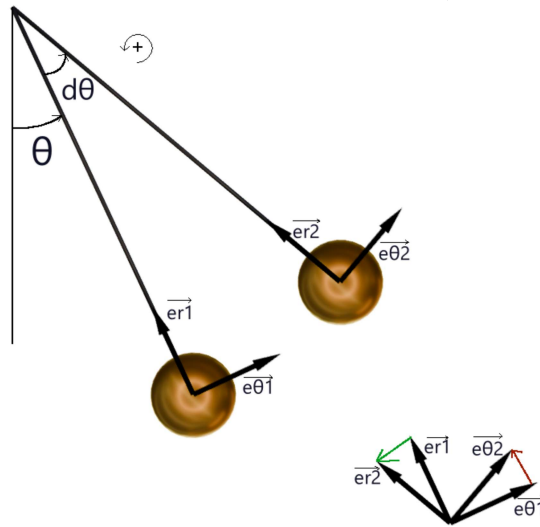
En appelant M le point où se trouve le centre de masse du pendule, la position du pendule est donnée par :

$$\text{Position} = \overrightarrow{OM} = -l\vec{e}_r$$

avec l la longueur du pendule. La vitesse est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{dl\vec{e}_r}{dt} = -l\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Il y a ici une subtilité. Les vecteurs de la base de Frenet ne sont pas constants ! Ils tournent lors du déplacement du pendule. A l'aide d'un schéma voyons ce qui se passe si le pendule tourne d'un petit angle $d\theta$ positif (exagéré sur le schéma pour des questions de lisibilité) :



On peut voir sur le schéma que si l'angle θ varie de la quantité $d\theta$, alors :

— Le vecteur $\vec{e}_r$ est modifié de la quantité $-d\theta\vec{e}_\theta$, en vert sur le schéma ;

— Le vecteur $\vec{e}_\theta$ est modifié de la quantité $d\theta\vec{e}_r$, en rouge sur le schéma ;

On rappelle que la longueur d'un arc-de-cercle est égal à l'angle qu'il délimite multiplié par le rayon du cercle et que la norme des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ vaut toujours 1 ;

Ainsi, les dérivées des vecteurs par rapport à l'angle θ sont :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\vec{e}_\theta$$

et

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \vec{e}_r$$

On peut de plus écrire :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

et

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Mettons cela dans l'expression de la vitesse précédemment déterminée :

$$\vec{v} = -l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r = +l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

Et dérivons suivant le même principe pour trouver l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r$$

Si on reprend l'expression déterminée à l'aide de la seconde loi de Newton :

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} T - P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$m \begin{pmatrix} l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ l \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T - P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Que l'on peut écrire comme le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = T - P \cos(\theta) \\ ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -P \sin(\theta) \end{cases}$$

On se demande bien pourquoi on s'est cassé la tête avec des vecteurs variables au cours du temps ! Mais ici, cela commence à payer. Car on ne connaît pas la valeur de T !

Si on avait projeté dans la base constante $(\vec{e}_x; \vec{e}_z)$, T se serait retrouvée dans les deux équations. Or ici, l'équation du bas ne comporte pas T et il devient assez simple de la résoudre, notamment si on applique l'approximation des petits angles : $\sin \theta \approx \theta$. Elle devient alors :

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -P\theta$$

Remplaçons P par son expression $P = m \times g$ pour simplifier encore :

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

Il s'agit d'une équation différentielle, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une *fonction*, la fonction $\theta(t)$ ici. Pour être plus précis c'est une équation différentielle d'ordre 2 puisqu'elle fait intervenir la dérivée seconde. Une solution de cette équation est la fonction :

$$\theta(t) = A \times \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

En effet : si on dérive cette fonction, on trouve :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -A \sqrt{\frac{g}{l}} \times \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

Et en dérivant encore une fois :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -A \frac{g}{l} \times \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) = -\frac{g}{l} \theta(t)$$

1.2.2 Interprétation

On a ainsi pu déterminer une expression de l'angle formé par le pendule en fonction du temps. Cette fonction décrit bien des oscillations : c'est une fonction trigonométrique. On peut également l'exploiter pour déterminer la

période du pendule : en effet, puisque la fonction $\cos$ est de période 2π , on a :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

avec T la période d'oscillation du pendule.

Ce résultat est assez important pour l'histoire de l'utilisation du pendule, en particulier en tant qu'instrument de mesure du temps. En effet, à *condition de pouvoir appliquer l'approximation des petits angles*, on remarque que la période d'oscillation ne dépend que du champ de pesanteur g et de la longueur du pendule l : ces deux valeurs étant constantes, la période d'oscillation est elle aussi une constante ; en particulier elle ne dépend pas de l'angle, tant que celui-ci demeure assez faible. On appelle ce fait *l'isochronisme* des oscillations du pendule.

Vous me direz que c'est bien beau tout ça, mais on aurait pu mener la même étude sur n'importe-quel pendule finalement ; y compris celui de la vieille comtoise de mes grands-parents. Mais alors, est-ce bien tout ce que le pendule de Foucault a à nous offrir ? Pourquoi ce pendule, ou ces pendules, ont-ils un intérêt particulier pour étudier la Physique ?

1.2.3 Les limites de l'expérience : ce que met en évidence le pendule de Foucault

Tout du long de cette étude, nous n'avons eu besoin que de deux vecteurs de base. Les bases représentées étaient des bases en deux dimensions : à aucun moment nous n'avons eu besoin d'un troisième vecteur de base. D'après notre étude, le pendule est censé osciller *dans un plan* : le plan décrit par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. Ces vecteurs varient, certes, mais leurs variations s'expriment en fonction des mêmes vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$! Ainsi les vecteurs $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ se trouvent aussi dans le plan formé par $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$... ainsi les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ restent toujours dans leur même plan. Ce plan est donc constant. Les oscillations du pendule doivent donc décrire, dans le référentiel terrestre du Panthéon supposé galiléen, un plan : celui formé par le pendule avant son lâcher et la verticale.

Or ce n'est pas ce qu'il se passe.

Le plan d'oscillation du pendule n'est en vérité pas constant dans le référentiel terrestre. Celui-ci tourne lentement sur lui-même.

Une interprétation simple de cette rotation est la suivante : en vérité le

référentiel terrestre n'est pas galiléen. Pour étudier correctement le pendule, on devrait utiliser le référentiel géocentrique, celui lié au centre de la Terre, dans lequel on peut voir la surface de la Terre tourner : c'est ce référentiel qu'on utilise le plus souvent pour étudier les trajectoires des satellites par exemple.

Si on y regarde pas de trop près, alors on peut s'amuser à supposer que le plan d'oscillation du pendule est en fait constant dans le référentiel géocentrique. Et que si on voit le pendule tourner dans le référentiel du Panthéon, c'est parce que "la Terre tourne sous lui" : le plan d'oscillation du pendule ne bouge pas par rapport aux étoiles, mais du fait de la rotation de la Terre sur elle-même, finalement c'est le Panthéon qui tourne autour de ce plan.

C'est ainsi que l'on prétend expliquer que le pendule de Foucault du Panthéon voit son plan d'oscillation faire un tour complet sur lui-même en *32 heures...*

J'essaie de vous faire subtilement comprendre que cette explication n'est pas vraiment suffisante. L'idée que "la Terre tourne sous le pendule" est intéressante et en partie vraie, cependant le plan d'oscillation n'est absolument pas fixe, dans le cas général, par rapport aux étoiles. On peut se dire intuitivement que c'est le cas au niveau des pôles ; mais ailleurs ? Il paraît impossible, pour un pendule au niveau de l'équateur, d'avoir un plan d'oscillation fixe par rapport aux étoiles, sans qu'à un moment il ne vienne se télescoper dans le sol...

Pour comprendre ce qu'il se passe il faut s'intéresser aux transformations des positions, vitesses, et accélérations (qu'on devra relier aux forces dans la seconde loi de Newton...) lors d'un changement de référentiel.

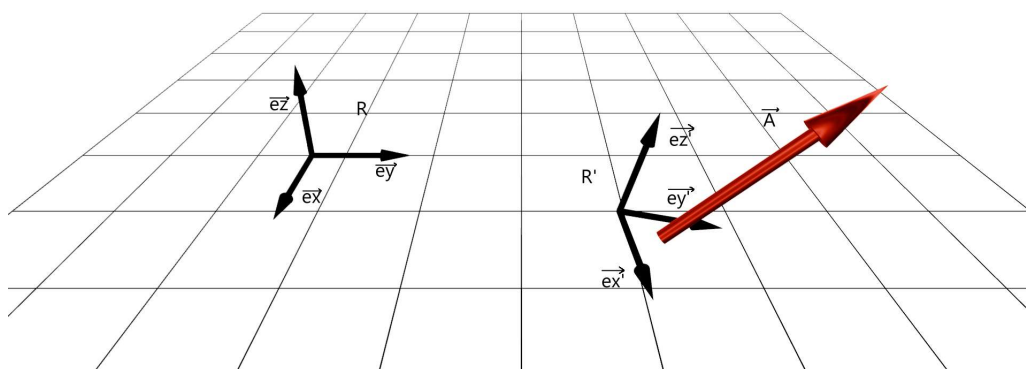
2 Changement de référentiel et transformation des vitesses et accélérations

Pour étudier cette question, on utilise deux référentiels :

- Le référentiel $\mathcal{R}$ qu'on supposera galiléen, d'origine O et garni de la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$;
- le référentiel $\mathcal{R}'$ d'origine O' et garni de la base $(\vec{e}'_x; \vec{e}'_y; \vec{e}'_z)$, et qui se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}$.

2.1 Vecteur quelconque et changement de référentiel

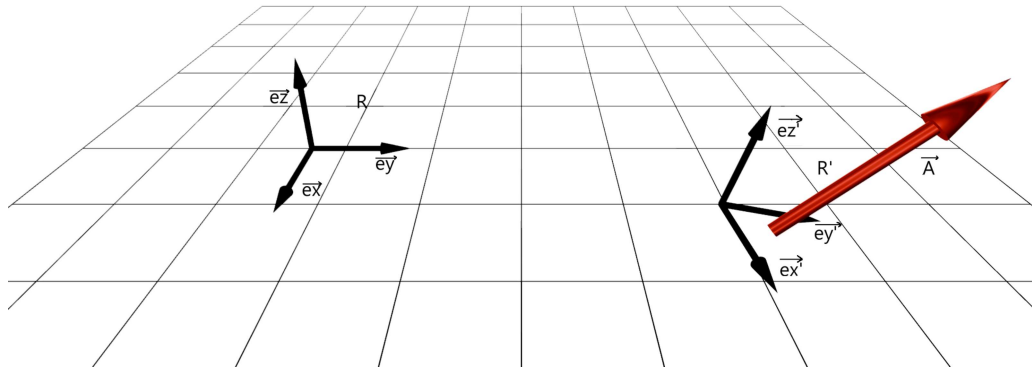
On étudie en particulier un vecteur quelconque, le vecteur $\vec{A}$, et comment déterminer sa variation dans un référentiel à partir de sa variation dans l'autre référentiel.



Pour le moment, supposons que le vecteur $\vec{A}$ soit constant, quand on le regarde depuis $\mathcal{R}'$, c'est-à-dire que sa direction, son sens, sa norme, ne changent pas par rapport aux vecteurs de base $(\vec{e}'_x; \vec{e}'_y; \vec{e}'_z)$.

2.1.1 Translation

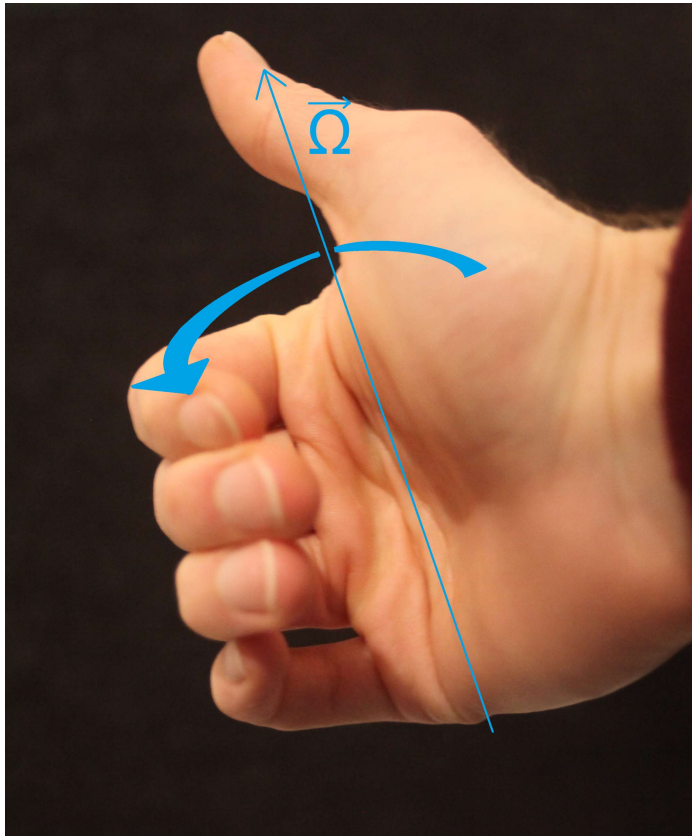
Si le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ est un simple mouvement de translation, et que le vecteur $\vec{A}$ est constant dans $\mathcal{R}'$, on n'observera aucune variation dans $\mathcal{R}$.



On voit que le référentiel s'est déplacé ; peut-être que le point d'application du vecteur (si c'est un vecteur de force par exemple) s'est déplacé aussi mais ni sa norme, ni sa direction, ni son sens n'ont changé quand on regarde depuis $\mathcal{R}$. Ainsi la translation du référentiel par rapport à l'autre n'a absolument aucune influence.

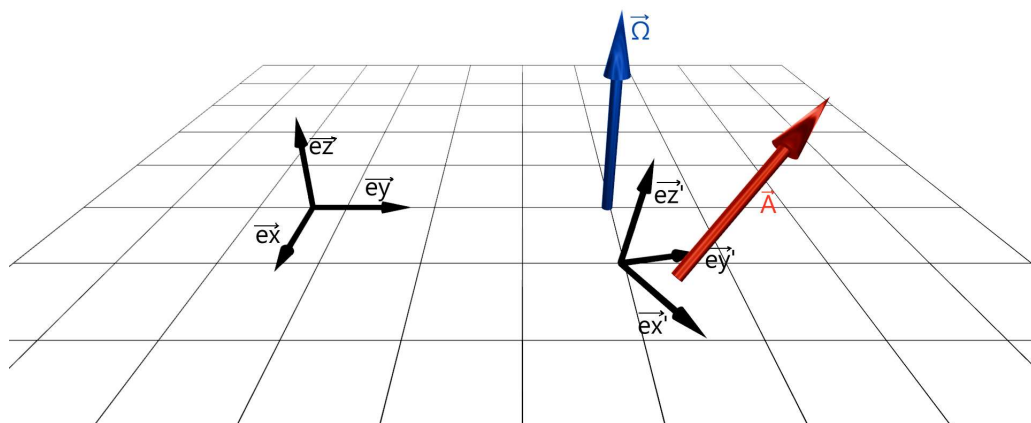
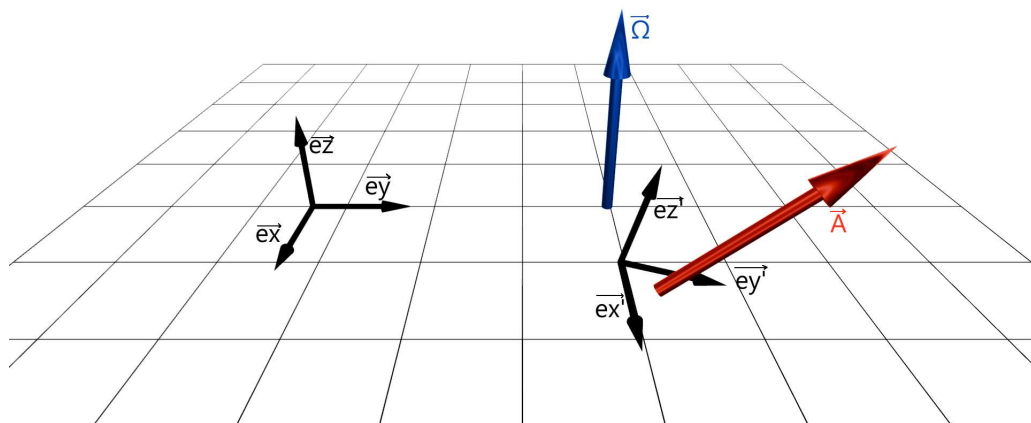
2.1.2 Rotation

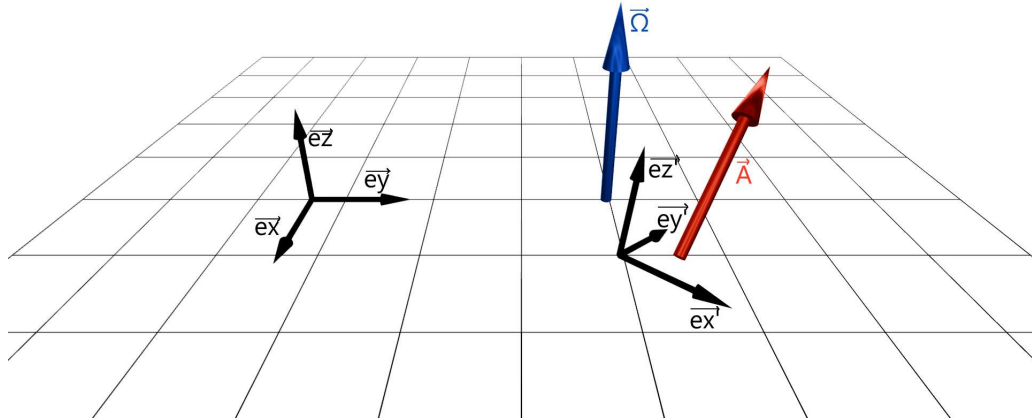
Il n'en va pas de même pour la rotation. Soit $\vec{\Omega}$ le *vecteur rotation* de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un vecteur parallèle à l'axe de rotation sur lui-même de $\mathcal{R}'$; de sens déterminé par la règle de la main droite (rotation dans le sens d'enroulement des doigts $\rightarrow$ sens du vecteur rotation donné par le pouce), et dont la norme est égale à la vitesse angulaire, en rad.s^{-1} , de la rotation de $\mathcal{R}'$ (exemple : si le référentiel fait 1 tour complet par seconde, sa vitesse angulaire est de $2\pi \text{ rad.s}^{-1}$).



Ci-dessus une illustration de cette "règle de la main droite", aussi appelée "règle du tire-bouchon".

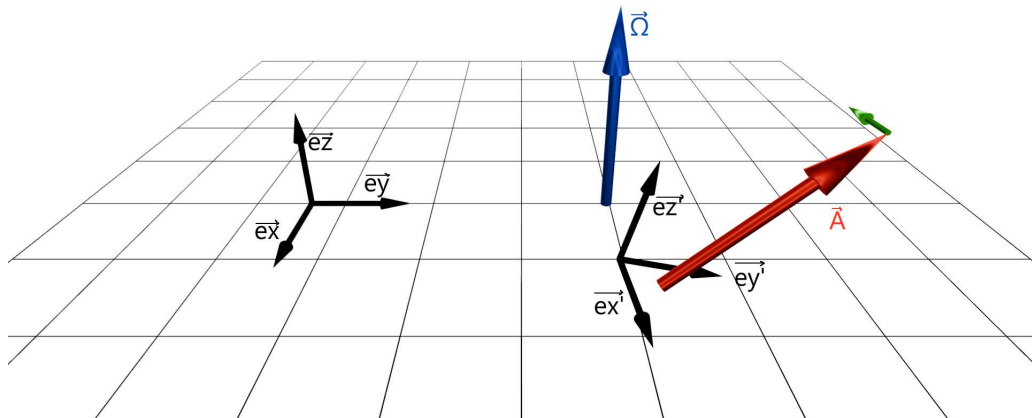
le vecteur $\vec{A}$ est toujours constant vu depuis $\mathcal{R}'$, voyons ce qu'il se passe pour le vecteur $\vec{A}$ vu depuis $\mathcal{R}$:





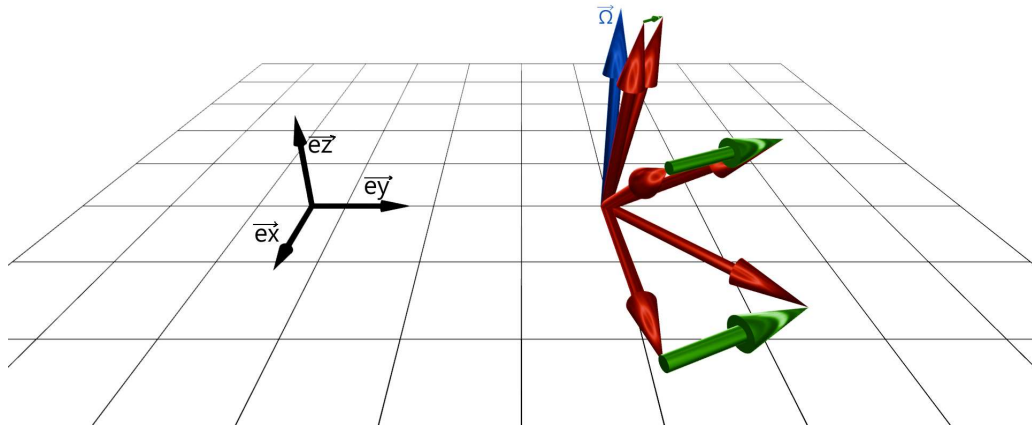
Comme on pouvait s'y attendre, le vecteur $\vec{A}$ tourne en même-temps que le référentiel. Mais comment exprimer sa variation ?

Sa variation est représentée par le vecteur en vert sur le schéma ci-dessous :



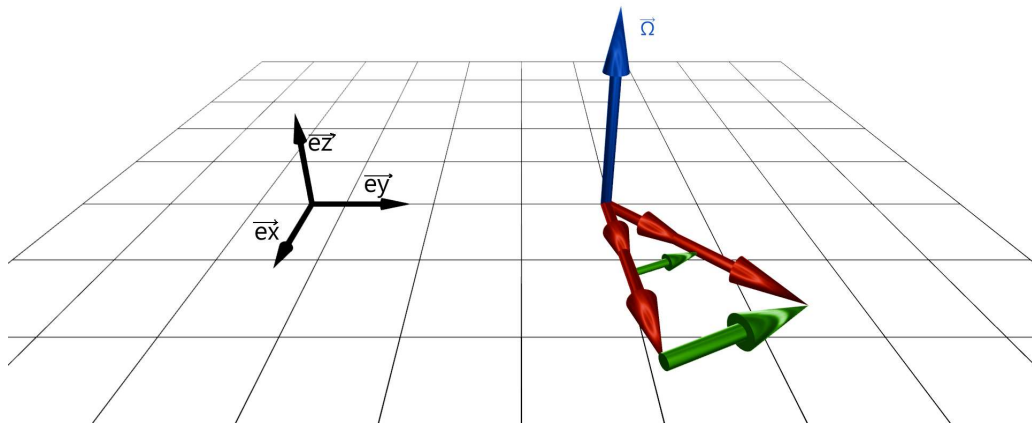
Plus le référentiel tourne vite, plus la variation est importante : la variation de $\vec{A}$, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ est proportionnelle à Ω , la vitesse angulaire (et norme du vecteur rotation).

De plus : plus le vecteur $\vec{A}$ est incliné par rapport à l'axe de rotation, plus sa variation va être importante :



Si le vecteur $\vec{A}$ est colinéaire à l'axe de rotation, il ne changera pas de direction. Au contraire s'il lui est perpendiculaire la variation est maximale. On en déduit le fait que $\frac{d\vec{A}}{dt}$ soit proportionnel à $\sin(\vec{\Omega}, \vec{A})$.

De plus bis : plus le vecteur $\vec{A}$ est long plus sa variation va être importante :



D'où la proportionnalité de $\frac{d\vec{A}}{dt}$ à $||\vec{A}||$.

De plus ter : le vecteur représentant $\frac{d\vec{A}}{dt}$, en vert sur le schéma, a toujours une direction perpendiculaire à la fois au vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et à $\vec{A}$.

In fine, il vient :

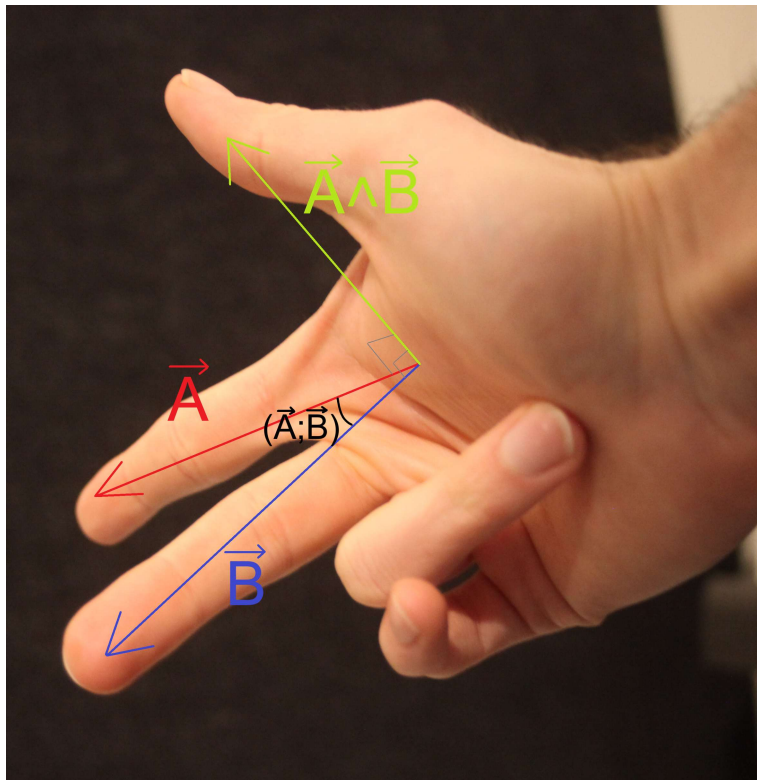
$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \Omega ||\vec{A}|| \sin(\vec{\Omega}, \vec{A}) \vec{u}$$

avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire, normal à la fois à $\vec{\Omega}$ et à $\vec{A}$, de sens donné par la règle de la main droite ($\vec{\Omega}$ représente l'index tendu, $\vec{A}$ le majeur, $\vec{u}$ le pouce tendu).

Ce résultat s'écrit différemment :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

où $\wedge$ est l'opérateur produit vectoriel : par définition, $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ renvoie un vecteur de direction normale à $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, de norme égale à $||\vec{X}|| \times ||\vec{Y}|| \times \sin(\vec{X}; \vec{Y})$, de sens donné par la règle de la main droite.



2.1.3 Si le vecteur change lui-même dans $\mathcal{R}'$

Si le vecteur $\vec{A}$ change dans $\mathcal{R}'$ naturellement ce changement sera aussi visible dans $\mathcal{R}$. Cette variation s'ajoute à celle causée par la rotation relative des deux référentiels.

2.1.4 Conclusion

La conclusion est que :

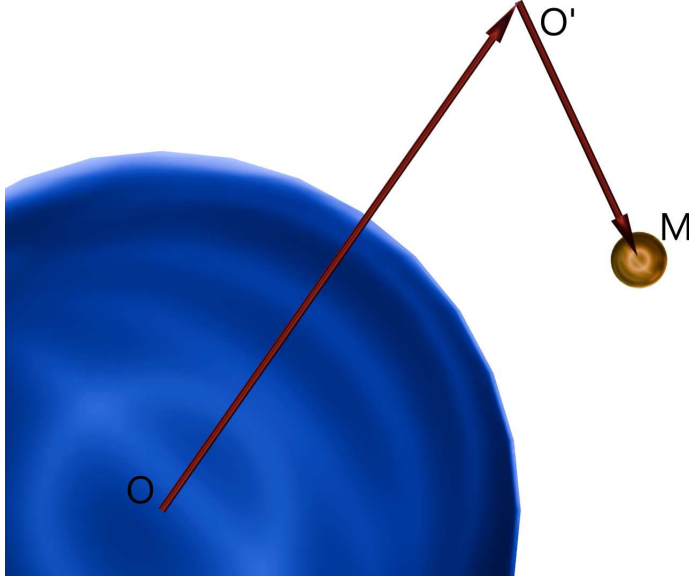
$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Cette relation est appelée *formule de Bour*. On l'utilisera par la suite pour étudier les différences entre le référentiel terrestre (du Panthéon) et le référentiel géocentrique.

On précise en bas à droite des dérivées le référentiel dans lequel on les considère (variation dans $\mathcal{R}$, variation dans $\mathcal{R}'$...)

2.2 Variation de position, vitesse, accélération par changement de référentiel

2.2.1 Vecteur position



On a représenté la situation ci-dessus. Les deux référentiels qui nous intéressent sont le référentiel du Panthéon $\mathcal{R}'$, d'origine notée O' cette fois-ci, et le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$, dont l'origine est le centre de la Terre noté O .

Pour ne pas alourdir les calculs, on suppose que $\vec{\Omega}$, le vecteur rotation de la Terre, qui est aussi le vecteur rotation du référentiel du Panthéon par rapport au centre de la Terre, est constant. On se passe de certaines dérivées fastidieuses, car on en a déjà bien assez. Ce vecteur est dirigé selon l'axe des pôles, et sa norme vaut $\frac{2\pi}{24\ h}$.

Le vecteur position dans $\mathcal{R}$ se déduit d'une simple relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

2.2.2 Vitesse et accélération

La vitesse, puis l'accélération, se déduisent de la relation ci-dessus, qu'on dérive puis à laquelle on applique la formule de Bour :

$$\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

où $\overrightarrow{v_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$, qu'on appelle "vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ " est la vitesse de déplacement de O' dans $\mathcal{R}$.

On poursuit pour trouver l'accélération :

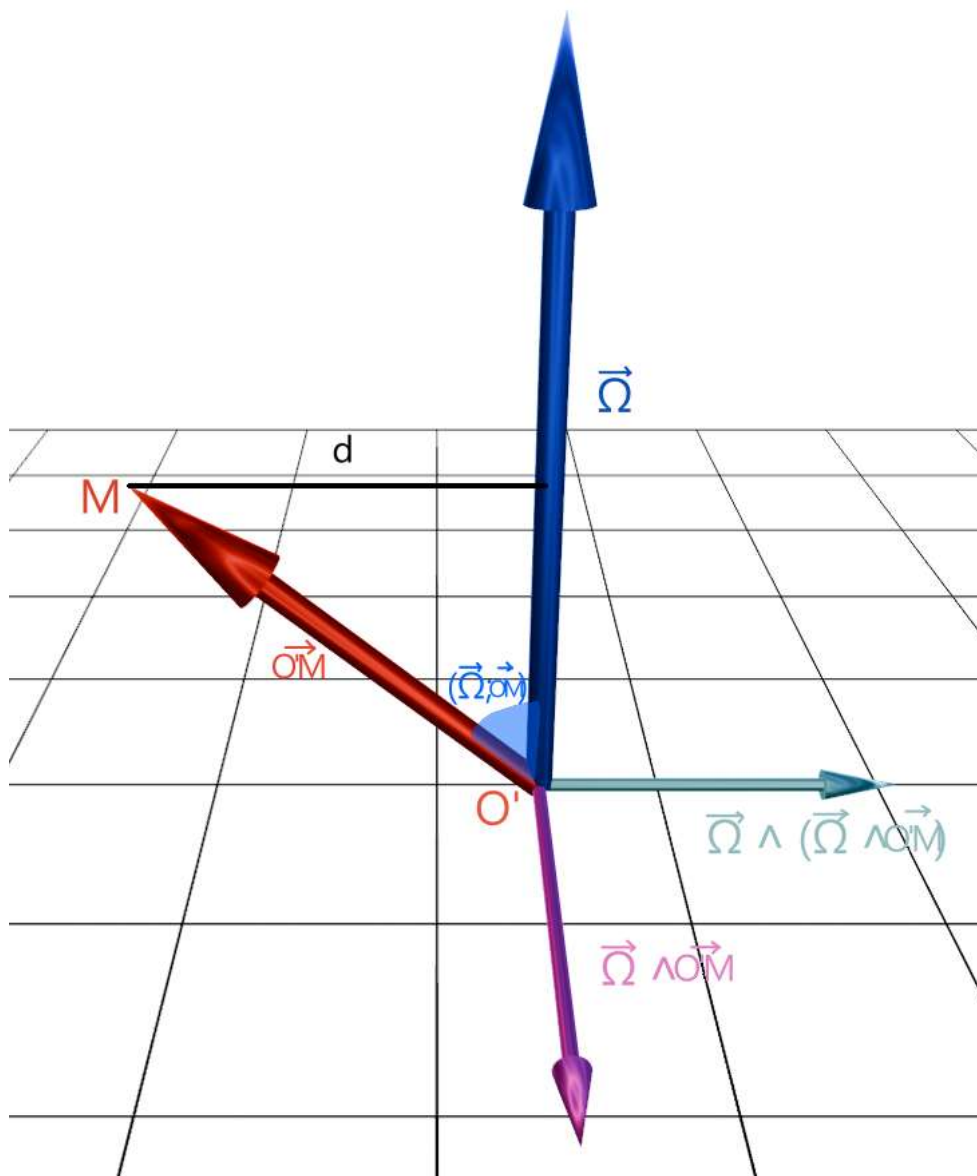
$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = \left(\left. \frac{d\overrightarrow{v_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right) + \left(\left. \frac{d\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right) + \left(\vec{\Omega} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right)$$

$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = (\vec{a_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}) + \left(\left. \frac{d\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} \right) + \left(\left. \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \right)$$

$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = (\vec{a_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}) + \left(\left. \frac{d\overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} \right) + (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}))$$

$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{a_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

Nous avons affaire à un double produit vectoriel : $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$. Décortiquons-le :



Par définition, $(\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$ renvoie un vecteur perpendiculaire à la fois à $\vec{\Omega}$ et à $\vec{O'M}$, de norme $\Omega \times \|\vec{O'M}\| \times \sin(\vec{\Omega}; \vec{O'M})$. En examinant le schéma ci-dessus, et en faisant appel à des bases de trigonométrie, on se rend compte que $\|\vec{O'M}\| \times \sin(\vec{\Omega}; \vec{O'M})$ est en fait égal à d , la distance entre le point M et l'axe de rotation. Le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}$ a donc pour norme Ωd . Il est représenté en mauve sur le schéma.

Le vecteur $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{\Omega}$ et à $(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$: il est représenté en bleu clair sur le schéma. Sa norme vaut : $\Omega \times \|(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\| \times \sin(\vec{\Omega}; (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}))$: puisque les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ sont déjà perpendiculaires l'un à l'autre, ce sinus vaut $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$;

Ainsi la norme de $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ vaut $\Omega \times \Omega d \times 1 = \Omega^2 d$.

On constate que sa direction est celle qui relie le point M à l'axe de rotation ; son sens est dirigé vers l'axe de rotation. Ainsi en inventant un vecteur $\vec{u}$, unitaire, dirigé de M vers l'axe de rotation :

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \Omega^2 d \times \vec{u}$$

Incluons ce résultat dans l'expression de l'accélération :

$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + \Omega^2 d \vec{u}$$

2.3 Que devient le bilan des forces ?

Si on suppose le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ galiléen, alors, pour le pendule de masse m :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}}$$

Or,

$$\overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + \Omega^2 d \times \vec{u}$$

d'où

$$m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} = m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} + m \vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + 2m \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} + m \Omega^2 d \times \vec{u}$$

En isolant $m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'}$ on obtient :

$$m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} = m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}} - m \vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - 2m \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} - m \Omega^2 d \times \vec{u}$$

D'après le bilan des forces tirés plus haut :

$$m \overrightarrow{a(M)}_{\mathcal{R}'} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} - m \vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - 2m \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{\mathcal{R}'} - m \Omega^2 d \times \vec{u}$$

Du fait de tous les termes autres que $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ à droite, la seconde loi de Newton, à proprement parler, n'est plus valable dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen. Ainsi, si on suppose le référentiel

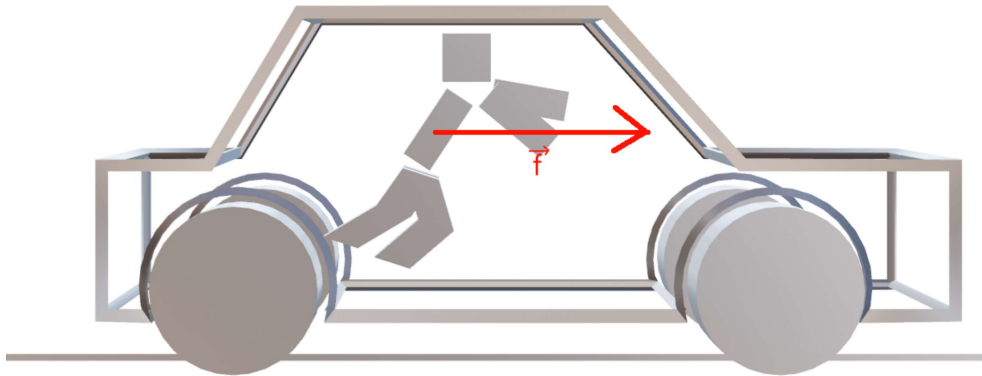
géocentrique galiléen, on ne peut pas supposer que le référentiel du Panthéon, qui est en rotation dans ce référentiel, soit galiléen également.

Comment s'en tirer dans ce genre de situation ? Les termes supplémentaires du membre de droite sont simplement interprétés comme de nouvelles forces, qu'on ajoute au bilan des forces dans le référentiel $\mathcal{R}'$, ce qui permet de quand-même appliquer une seconde loi de Newton. En vérité il vaut mieux parler de "pseudo-forces", car en principe une "force" ne doit pas dépendre du référentiel d'étude. Nous avons ainsi :

- $\vec{f}_i = -m\vec{a}_{e\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, "pseudo-force d'inertie" ;
- $\vec{f}_{cen} = -m\Omega^2 d \times \vec{u}$, "pseudo-force centrifuge" ($\vec{u}$ est dirigé *vers* l'axe de rotation : le signe $-$ fait que cette force est dirigée à l'opposé de l'axe de rotation, elle "fuit" le centre de rotation d'où le terme "centrifuge") ;
- $\vec{f}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$, "pseudo-force de Coriolis" ;

2.3.1 Éléments d'interprétation de ces nouvelles forces

La pseudo-force d'inertie dépend de l'accélération du référentiel en lui-même. Par exemple : si vous êtes immobile dans une voiture se déplaçant en ligne droite, et que celle-ci accélère : vous avez l'impression d'être plaqué contre le siège, qu'une force s'exerce sur vous en sens inverse de l'accélération de la voiture. Plus parlant encore : si la voiture freine brutalement, vous vous sentirez projeté vers l'avant, donc qu'une force, à nouveau, s'exerce sur vous en sens inverse de l'accélération de la voiture...



En vérité, c'est votre inertie qui est en jeu.

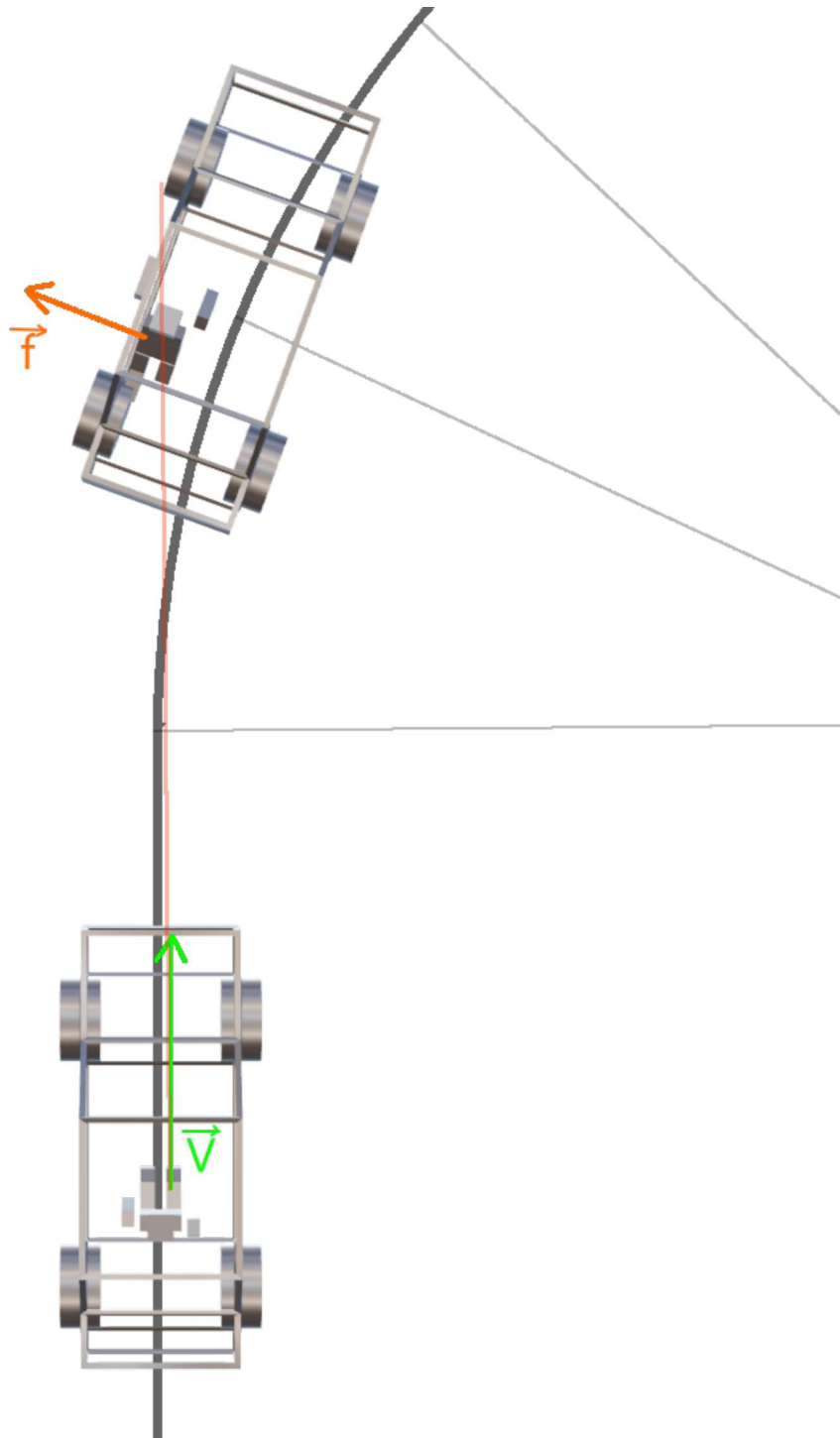
Vu depuis un référentiel galiléen, lors du freinage, de par votre inertie

vosre masse "souhaite" poursuivre le mouvement rectiligne uniforme que vous aviez avant, identique à celui de la voiture. D'où la sensation d'être projeté en avant. Heureusement que la ceinture de sécurité est là pour exercer une force qui vous retienne.

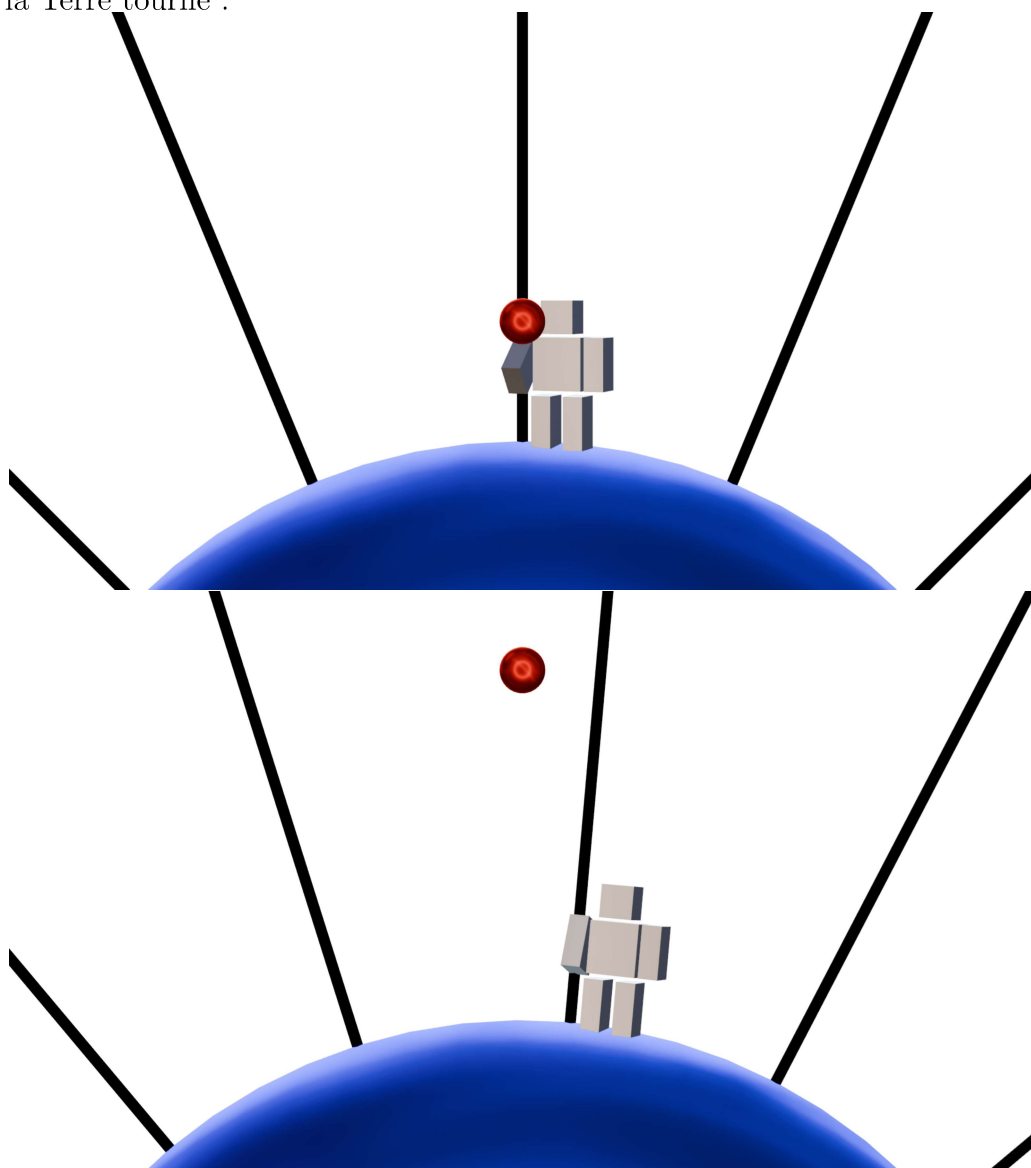


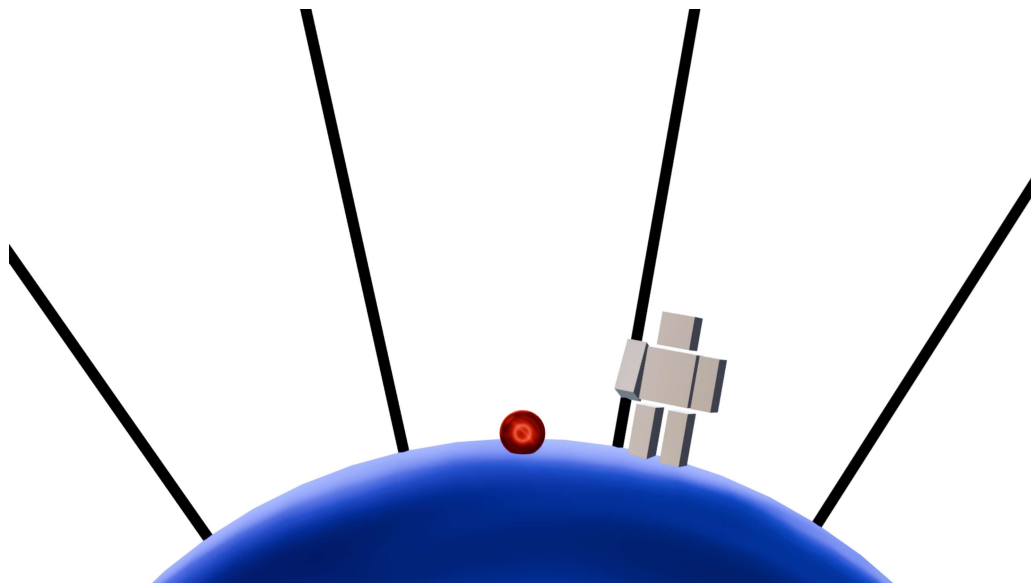
Lors du démarrage de la voiture, "votre masse lutte" pour persister dans son immobilité. Il faut que le dossier du siège sur lequel vous êtes assis exerce une force de contact sur vous pour que vous accompagniez le mouvement de la voiture, d'où la sensation d'être, au contraire dans ce cas-là, plaqué sur le siège.

La force centrifuge revêt un rôle analogue. On la ressent par exemple dans une voiture qui parcourt un virage : on a la sensation d'être plaqué sur le côté de la voiture, par une force qui tend à nous éloigner du centre de rotation de la voiture, le centre du virage : cette force est représentée en orange sur le schéma. Mais en vérité, cette force *n'existe pas* dans un référentiel galiléen hors de la voiture : c'est simplement que votre inertie, à nouveau, vous pousse à avoir un mouvement *rectiligne* uniforme. Puisque la voiture "tourne en-dessous de vous", depuis la voiture, vous avez l'impression qu'une force vient vous plaquer contre la portière. Heureusement que vous êtes contrarié en ce sens par votre ceinture de sécurité et/ou la portière de la voiture, qui se mettent en travers du chemin auquel l'inertie vous destine, représenté en rouge sur le schéma.



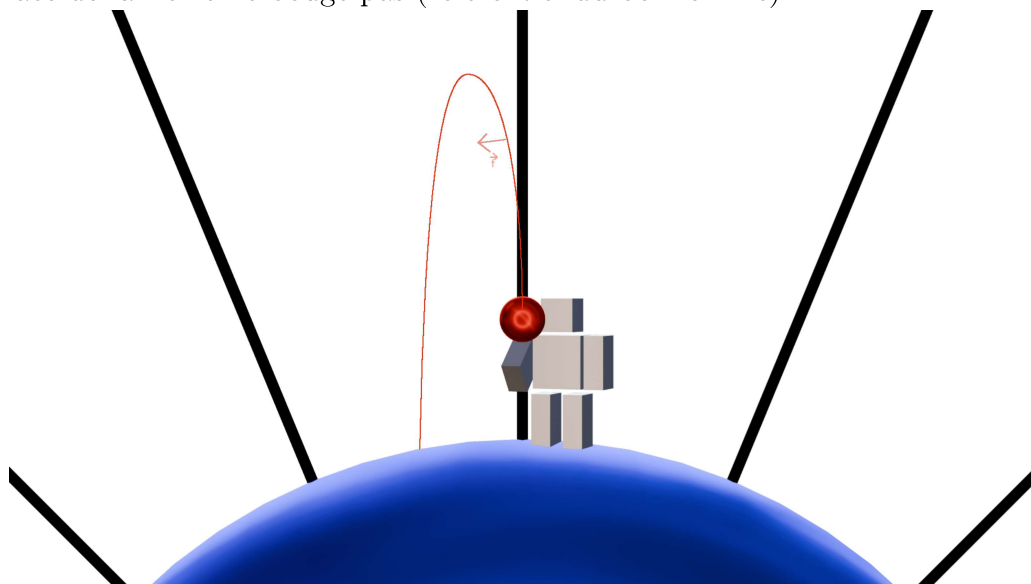
Passons à l'interprétation de la force de Coriolis. Imaginons qu'on lance, depuis la surface de la Terre, une balle parfaitement à la verticale. Une fois lancée, sur elle s'applique, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, l'attraction gravitationnelle de la Terre, dirigée vers le centre de la Terre. Voici ce que cela donne dans le référentiel géocentrique, dans lequel la surface de la Terre tourne :





Initialement, la balle a un mouvement rectiligne uniforme selon la verticale de son point de lancer. Mais, une fois lancée, du fait que la surface de la Terre a tourné sous elle, elle ne retombe pas à la verticale de son point de départ !

Voici sa trajectoire globale vue dans le référentiel terrestre, dans lequel la surface de la Terre ne bouge pas (référentiel du bonhomme) :



La trajectoire est incurvée dans la direction opposée à la rotation de la

Terre.

Cette déviation n'est pas explicable, ni par la "force d'inertie" ni par la "force centrifuge" car ces forces sont toutes dirigées vers le centre de la Terre, donc toujours à la verticale.

Le bonhomme interprétera la déviation de la trajectoire de la balle par rapport à sa verticale en invoquant une autre force, la force de Coriolis.

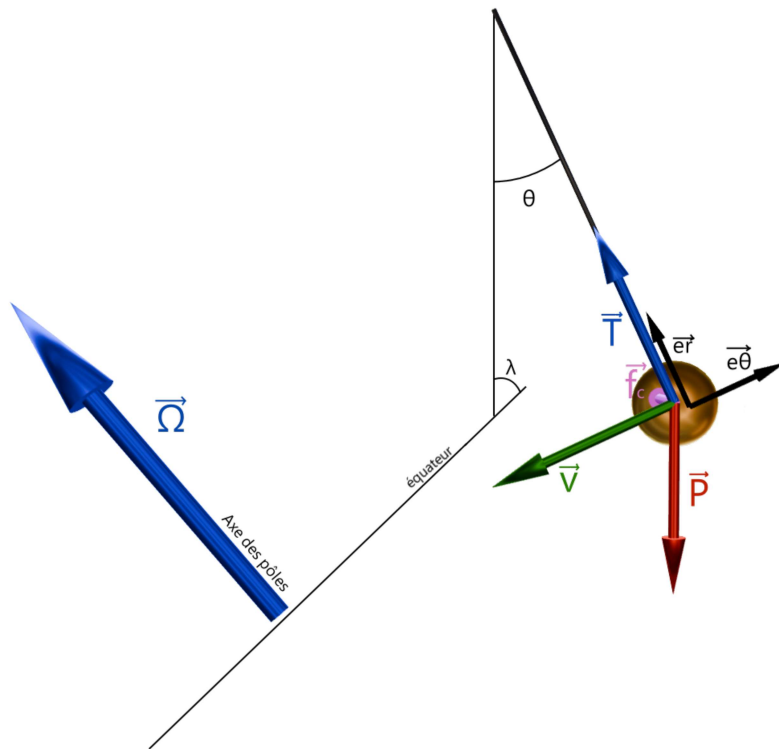
C'est en particulier la force de Coriolis qui nous intéressera pour interpréter le curieux mouvement du pendule de Foucault.

Sur Terre, cette force de Coriolis cause entre autres la "déviation vers l'Est", phénomène affectant les projectiles lancées depuis la Terre et connu depuis plusieurs siècles. Elle intervient également dans la formation des ouragans.

3 Étude du pendule de Foucault tenant compte de la non-galiléalité du référentiel du Panthéon

3.1 Position du problème et discussion sur le rôle de la force de Coriolis

Reprenons la situation dans le référentiel terrestre mais ajoutons les pseudo-forces déterminées précédemment au bilan :



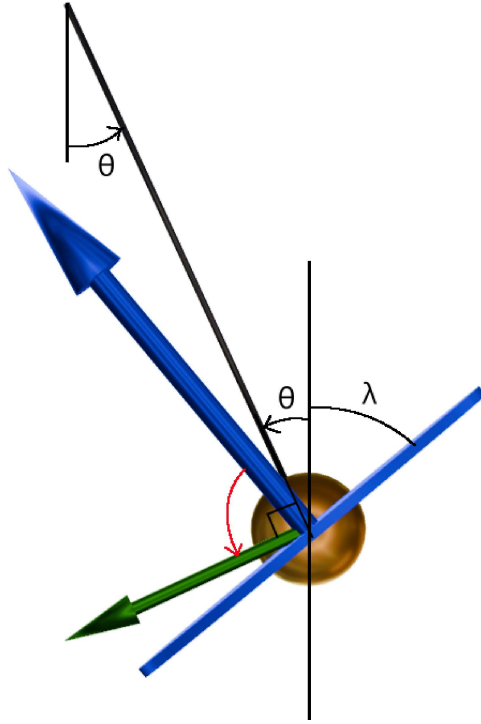
La force centrifuge a la même direction que la force d'interaction gravitationnelle : dirigée vers le centre de la Terre, selon la verticale du lieu. On l'inclut donc dans le poids.

Sur le schéma est représentée, en rose, la force de Coriolis. On voit qu'elle n'est pas dans le même plan que les forces $\vec{T}$ et $\vec{P}$: elle est normale à ce plan.

La norme de la force de Coriolis est :

$$||\vec{f}_c|| = 2m\Omega v \sin(\vec{\Omega}; \vec{v})$$

Cherchons la valeur de l'angle $(\vec{\Omega}; \vec{v})$:



On peut voir sur le schéma que l'angle entre l'équateur et $\vec{v}$ vaut $\lambda + \theta + \frac{\pi}{2}$; par conséquent, puisque le vecteur $\vec{\Omega}$ est perpendiculaire à l'équateur, il faut retirer $\frac{\pi}{2}$ pour arriver à l'angle $(\vec{\Omega}; \vec{v})$ d'où :

$$(\vec{\Omega}; \vec{v}) = \lambda + \theta$$

Si de surcroît on considère que θ est très très petit (ce qui est réaliste au Panthéon, étant donné l'énorme longueur de la corde, qui est de ce fait quasi-verticale en permanence :

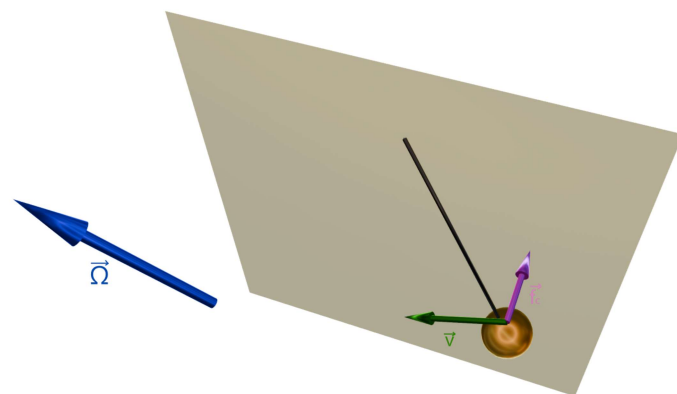
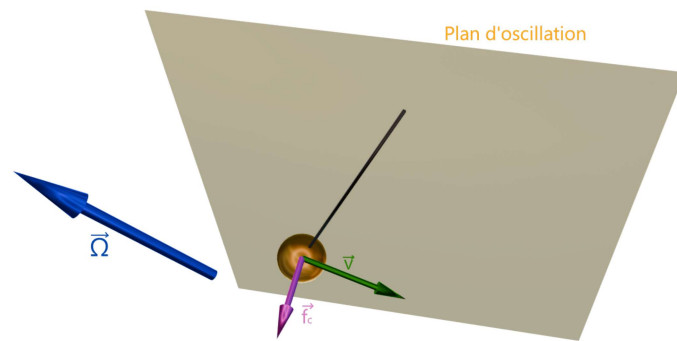
$$(\vec{\Omega}; \vec{v}) \approx \lambda$$

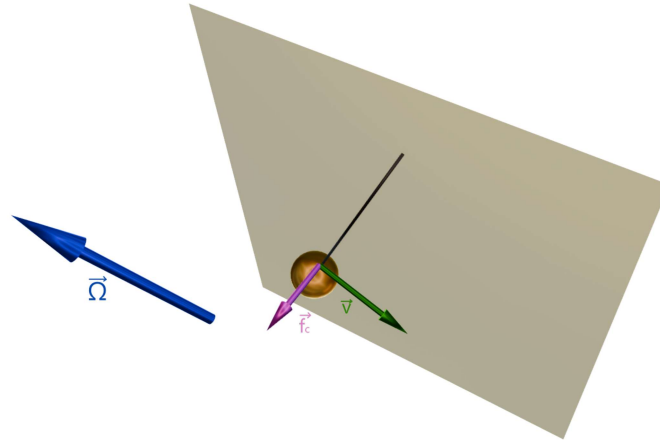
D'où in fine :

$$||\vec{f}_c|| = 2m\Omega v \sin(\lambda)$$

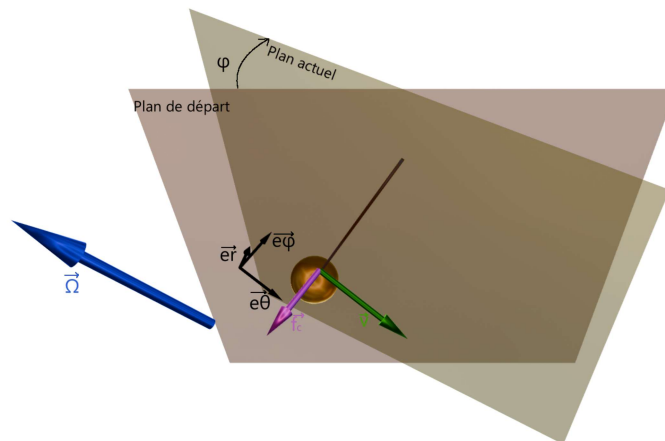
Il est intéressant de noter que cette force change tout le temps de direction, et surtout de sens au cours de l'oscillation, car le sens du vecteur vitesse change. La force de Coriolis, normale au plan d'oscillation du pendule, a pour effet de légèrement faire sortir le pendule de son plan, ce qui fait qu'à chaque oscillation, le plan se trouve légèrement tourné par rapport à l'oscillation

précédente comme schématisé ci-dessous : le pendule est vu légèrement de dessus.





Le schéma suivant donne les grandeurs utiles pour étudier la rotation du plan d'oscillation :



On utilise à nouveau une base de vecteurs tournante, à laquelle il faut ajouter un troisième vecteur, le vecteur $\vec{e}_\varphi$, qui permet précisément d'étudier la force de Coriolis car celle-ci lui est colinéaire. Ce vecteur $\vec{e}_\varphi$ est un vecteur unitaire et les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ forment une base orthonormée en trois dimensions.

3.2 Vitesse et accélération en trois dimensions

La même difficulté nous fait face, on est dans une base tournante et les vecteurs ne sont pas constants. Reprenons l'étude menée tout-à-l'heure et adaptons-là à la nouvelle situation. On admettra que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta - \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r + \cos(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} (-\cos(\theta) \vec{e}_\theta - \sin(\theta) \vec{e}_r)$$

Ainsi, dans cette base la vitesse devient :

$$\vec{v} = \frac{d(-l\vec{e}_r)}{dt} = l \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \right)$$

L'accélération devient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + l \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi)}{dt}$$

$$= l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r + l \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + l \frac{d\sin(\theta)}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + l \sin(\theta) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi - l \sin(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 (\cos(\theta) \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \vec{e}_r)$$

En réorganisant les termes par vecteur :

$$\vec{a} = l \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\sin(\theta)}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \sin(\theta) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \vec{e}_\varphi$$

Appliquons l'approximation des petits angles : $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$:

$$\vec{a} = l \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \theta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_\theta + l \left(2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \vec{e}_\varphi$$

3.3 Bilan des forces, projection, et résolution finale

Le bilan des forces donne :

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} T - P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \\ -2m\Omega v \sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

En supposant que la vitesse selon $\vec{e}_\varphi$ est beaucoup plus faible que la vitesse selon $\vec{e}_\theta$ (le pendule a une vitesse de quelques mètres par seconde en oscillant dans son plan, donc selon $\vec{e}_\theta$, mais le plan met plusieurs heures à tourner sur lui-même donc la vitesse selon $\vec{e}_\varphi$ est beaucoup plus faible) :

$$\vec{v} = l \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \right) \approx l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \Leftrightarrow v \approx l \frac{d\theta}{dt}$$

On écrit alors :

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} T - P \cos(\theta) \\ -P \sin(\theta) \\ -2m\Omega l \frac{d\theta}{dt} \sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

Note : le changement de sens de la force de Coriolis est bien inclus dans la dernière ligne, car $\frac{d\theta}{dt}$ change bien de signe à chaque oscillation.

Si on s'intéresse uniquement à la composante selon $\vec{e}_\varphi$, la plus intéressante pour étudier la rotation du plan d'oscillation :

$$ml \left(2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) = -2m\Omega l \frac{d\theta}{dt} \sin(\lambda)$$

De plus, en supposant que la rotation du plan sur lui-même se fait à vitesse quasi-constante, ce qui suppose la relation suivante :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx 0$$

On peut faire les simplifications :

$$l \left(2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) = 2\Omega l \frac{d\theta}{dt} \sin(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow 2l \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 2\Omega l \frac{d\theta}{dt} \sin(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \Omega \sin(\lambda)$$

Nous sommes tout près du but : la dérivée de l'angle φ est constante, $\varphi(t)$ est donc une fonction linéaire :

$$\varphi(t) = \Omega \sin(\lambda)t$$

On en déduit la période de rotation du plan d'oscillation :

$$\varphi(T_{rot}) = 2\pi \Leftrightarrow \Omega \sin(\lambda)T_{rot} = 2\pi \Leftrightarrow T_{rot} = \frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)}$$

On peut faire une application numérique, sachant $\Omega = \frac{2\pi}{24h}$ et la latitude de Paris est $\lambda \approx 49^\circ \approx 0,86\text{rad}$: on trouve alors :

$$T_{rot} = \frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)} = \frac{2\pi}{\sin(\lambda)} \frac{24h}{2\pi} = \frac{24h}{\sin(\lambda)} = \frac{24h}{\sin(0,86)} \approx 32h$$

On retrouve ici la période expérimentale de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault du Panthéon.

4 Conclusion

Le pendule de Foucault est un problème de physique donnant lieu à plusieurs niveaux de lecture. Au premier aspect : c'est un pendule, illustrant l'isochronisme des oscillations, l'intérêt du pendule dans la mesure du temps, exploité dès le XVII^{ème} siècle pour construire des horloges.

Au second aspect, l'activité très longue de ce pendule permet de mettre en évidence la lente rotation de son plan d'oscillation, que l'on explique, depuis la surface de la Terre, via la force de Coriolis, laquelle n'est pas réellement une force mais plutôt un effet conséquent de la rotation de la Terre. Ainsi Léon Foucault, en montrant un phénomène facilement visible explicable par la force de Coriolis, a-t-il souhaité prouver expérimentalement la rotation de la Terre, et cela avec succès.

On peut encore tirer des leçons de cette expérience, en particulier sur la validité des lois de Newton et des changements de référentiel. En effet : pour cette étude, le référentiel terrestre s'est révélé insuffisant. Il a fallu passer au référentiel géocentrique pour expliquer la force de Coriolis et l'intégrer à notre étude. Cette expérience montre donc que tous les référentiels ne se

valent pas ! Nous étions face à un phénomène ne pouvant tout simplement pas être expliqué dans le référentiel terrestre à lui seul, quel que soit notre habileté...

Pourtant, est-il bon d'abandonner l'usage du référentiel terrestre ? Assurément non, pour les petites expériences du quotidien (chute de petits objets à la surface de la Terre, comportement de véhicules terrestres...), le référentiel terrestre donne des prédictions, la plupart du temps, tout-à-fait acceptables. En fait, on comprendra que tant que la Terre n'a pas eu le temps de trop tourner pendant l'expérience, l'effet de la force de Coriolis est relativement limité, négligeable.

Le Pendule de Foucault outrepassa cette limite car il oscille en continu, sur plusieurs jours : l'expérience est alors trop longue pour que l'effet de la rotation de la Terre demeure invisible, et le référentiel géocentrique apparaît comme la clef de ce problème.

Mais le référentiel géocentrique est-il la solution à *tous* les problèmes ? Non ! Car la Terre tourne autour du Soleil... Pour étudier les trajectoires des astres, on peut donc être amené à tenir compte de forces de Coriolis, etc. ou utiliser le référentiel héliocentrique.

Mais le référentiel héliocentrique est-il la solution à *tous* les problèmes ? Non ! Car la Voie Lactée, et donc le système solaire, est en rotation autour de son trou noir...

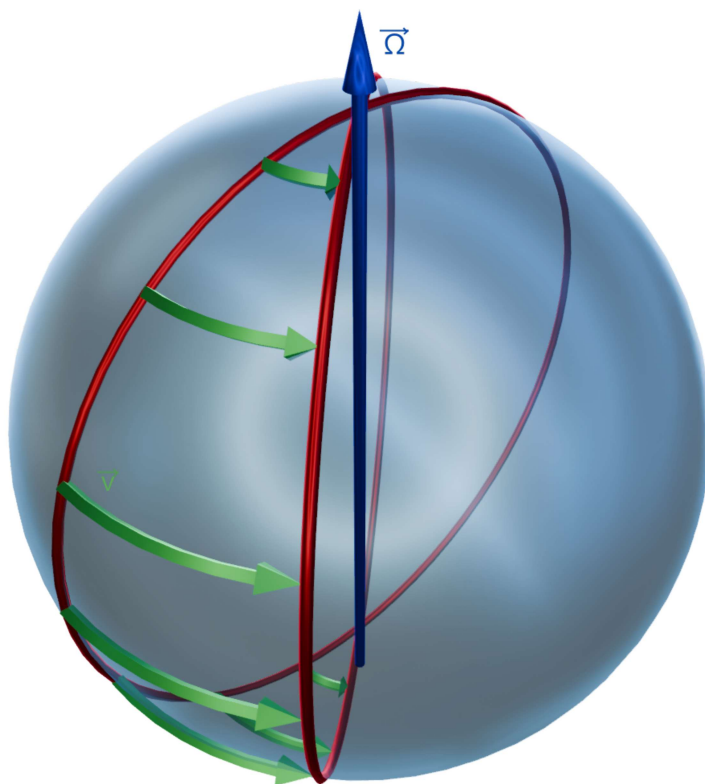
Finalement, le quatrième aspect de l'expérience du pendule de Foucault, est de nous dire qu'un référentiel galiléen, ça n'existe pas vraiment. Il n'existe que des référentiels dont le caractère galiléen est suffisamment bon, pour que la différence entre la prédiction et l'expérience soit acceptable, et des référentiels insuffisamment galiléens, dans lesquels on doit rajouter des forces de Coriolis et autres pour obtenir une prédiction suffisamment précise...

Ainsi, peut-être que le cinquième aspect de l'expérience du pendule de Foucault est qu'elle nous incite à l'humilité : elle nous rappelle que nos modèles, nos lois, toutes les choses "abstraites" que nous pouvons mettre en œuvre pour simuler la réalité n'ont de sens que si l'expérience, nos mesures, sont en mesure d'en corroborer les résultats. Elle nous rappelle donc, finalement, quel est notre rôle et comment nous conduire en tant que scientifiques...

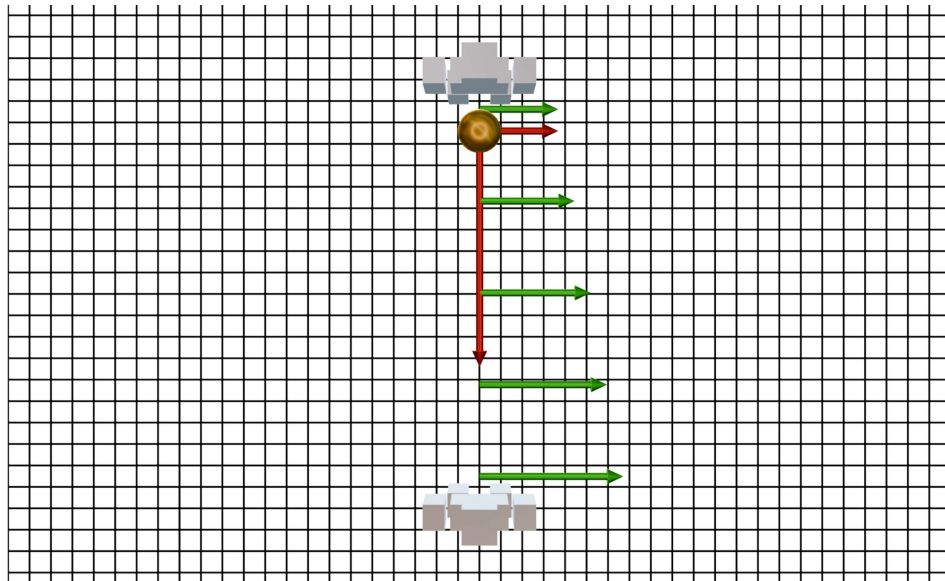
A Pour mieux comprendre

Que vous ayez subi, avec courage, l'entièreté de l'analyse précédente, ou que vous ayez décroché : il n'est pas évident de comprendre la force de Coriolis et comment elle s'applique au pendule de Foucault. Le but de cet appendice est de fournir une explication plus intuitive basée sur des schémas. Vous pouvez la parcourir avant ou après la lecture des paragraphes ci-dessus.

Première chose à savoir : lorsqu'une sphère tourne sur elle-même, les points de sa surface ne se déplacent pas tous à la même vitesse. Les pôles sont immobiles. Les points de l'équateur ont une vitesse maximale.

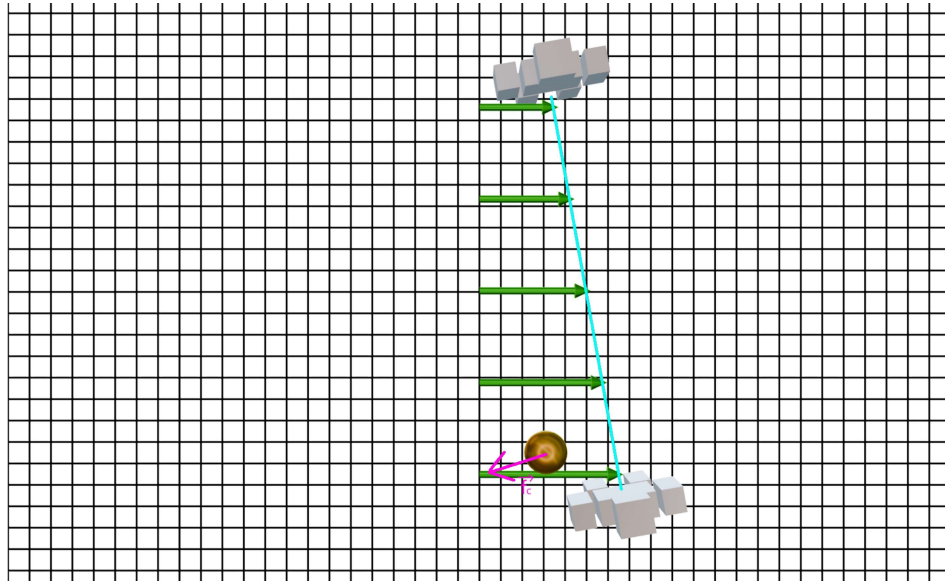


Quelle conséquence pour le pendule de Foucault ? Imaginons la situation la plus simple : le pendule du Panthéon est initialement tiré par un observateur en direction du pôle Nord. Il entame une première oscillation en direction du pôle Sud.



Tant qu'il est tenu par le premier observateur (en haut), le pendule a la même vitesse que lui : les vitesses dans le référentiel géocentrique sont représentées en vert. Les deux composantes de la vitesse du pendule juste après le lâcher sont représentées en rouge. On comprend que, puisqu'on est dans l'hémisphère Nord, l'observateur côté pôle Nord a une vitesse plus faible que l'observateur côté pôle Sud.

Une fois lâché, le pendule "souhaite" décrire une oscillation en direction du second observateur. Mais, comme celui-ci se déplace plus vite que lui dans le sens de rotation de la Terre, le pendule n'arrive pas directement face à lui mais légèrement sur sa gauche :



Dans le référentiel du Panthéon où la rotation de la Terre est invisible, où les deux observateurs ne bougent pas, le seul moyen pour l'observateur du bas d'expliquer que le pendule ne lui arrive pas dessus et dévie de la droite joignant les deux observateurs, en bleu, est d'ajouter la force de Coriolis, représentée en rose sur le schéma.

On peut également ajouter :

Dans l'hémisphère Nord, le pendule de Foucault tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans l'hémisphère Sud, l'observateur proche du pôle Nord a une vitesse *plus grande* que l'observateur situé plus proche du pôle Sud : la situation est inversée et le pendule tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Le même raisonnement, si on remplace le pendule par une masse d'air, permet d'expliquer le sens de rotation des ouragans en fonction de l'hémisphère.

A l'équateur, les deux observateurs auraient sensiblement la même vitesse : le pendule de Foucault ne tourne pas.

Ceci permet de justifier la dépendance par rapport à la latitude de la période de rotation du pendule. Plus la latitude est élevée, plus la différence de vitesse entre les deux observateurs est notable, donc plus la force de Coriolis a tendance à faire tourner le pendule. On peut alors comprendre un peu plus intuitivement la relation démontrée précédemment :

$$T_{rot} = \frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)}$$

avec T_{rot} la période de rotation du plan d'oscillations du pendule, Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre $= \frac{2\pi}{24h}$ et λ la latitude, permettant de prédire la période de 32 h de rotation du plan d'oscillations du pendule du Panthéon.